Mathematical Express

ROUND 1 (25 MINUTES)

1.1. *(7 points)* Is there such a natural number N that the equation $x_1^{2010}+x_2^{2010}+\ldots+x_{2010}^{2010}=N$ has no solutions in integers?

1.2. *(7 points)* In triangle ABC $(AB<AC)$ angle BAC is equal to α. On ray CA point D is marked, so that $CD=AB$. Line l is drawn through the midpoints of segments AD and BC. Find the angle between lines AB and l.

1.3. *(7 points)* Prove the inequality

$$1<\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{42}+\frac{1}{43}<2.$$

1.4. *(7 points)* Are there such numbers x and y, that each of the numbers $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ and x^2+y^2 is rational, and the number $x+y$ — irrational?

Using a micro calculator is prohibited!

ROUND II (25 MINUTES)

2.1. *(7 points)* Find all such positive numbers x, that the value of the expression $\frac{7x+3}{3x+8}$ is an integer.

2.2. *(7 points)* Positive numbers a, b and c are such that $ab+bc+ac=\frac{3}{2}$. Prove the inequality

$$\frac{a}{\sqrt{1-b^2}}+\frac{b}{\sqrt{1-c^2}}+\frac{c}{\sqrt{1-a^2}}\geq 3.$$

2.3. *(7 points)* Prove that the equation $x^{2010}+y^{2010}=z^{2011}$ has infinitely many solutions in natural numbers.

2.4. *(7 points)* In triangle ABC bisector AA_1 and altitude BB_1 are drawn. It is known that $\angle AA_1B=45°$. Prove that line AA_1 is tangent to the circumcircle of triangle CB_1A_1.

Using a micro calculator is prohibited!

ROUND III (25 MINUTES)

3.1. *(7 points)* Find all natural numbers which can not be represented as a sum of two mutually prime numbers other than 1?

3.2. *(7 points)* There is line l and two points A and B off it. Find such a point X, on the line, for which AX^2+BX^2 takes its smallest value.

3.3. *(7 points)* Can 17 integers be written in a line so that the sum of any four adjacent numbers was negative, and the sum of all numbers equalled 171?

3.4. *(7 points)* Find all sequences of natural numbers $\{a_n\}$ such that $a_1=1$ and for any natural numbers m and n the equality $a_{m+n}=a_m+a_n+mn$ is true.

Using a micro calculator is prohibited!

Matematik deneme sınavı

1. TUR (25 DAKİKA)

1.1. *(7 puan)*

$$x_1^{2010} + x_2^{2010} + \ldots + x_{2010}^{2010} = N$$

Denkleminin tam sayıyla çözümü olmayacak bir N, doğal sayısı var mı?

1.2. *(7 puan) ABC* üçgeninin $(AB < AC)$ BAC açısı eşittir α. *CA* ışınının üzerinde bir D noktası işaretlendi ve *CD* = *AB* oldu. *AD* ve *BC* doğrularının merkezlerinden bir *l* doğrusu çizildi. *AB* ve *l* doğruları arasındaki açı nedir?

1.3. *(7 puan)* Eşitsizliği ispatlayınız

$$1 < \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} < 2.$$

1.4. *(7 puan)* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ve $x^2 + y^2$ sayıların her biri rasyonel sayı, $x + y$ ise – irrasyonel sayı olacak şekilde *x* ve *y* sayıları var mı?

Hesap makinesi kullanmak yasaktır!

2. TUR (25 DAKİKA)

2.1. *(7 puan)* $\frac{7x+3}{3x+8}$ ifadesinin çözümü tam sayı olacak şekilde tüm pozitiv x sayılarını bulunuz.

2.2. *(7 puan) a*, *b* ve *c* pozitif sayılardır ve $ab + bc + ac = \frac{3}{2}$. Aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız

$$\frac{a}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{c}{\sqrt{1-a^2}} \geq 3.$$

2.3. *(7 puan)* $x^{2010} + y^{2010} = z^{2011}$ denkleminin doğal sayılarla çözümü sonsuz sayıda olduğunu ispatlayınız.

2.4. *(7 puan)* ABC üçgeninde AA_1 açıortay, BB_1 yükseklik çizildi ve $\angle AA_1B = 45°$. AA_1 doğrusunun CB_1A_1 üçgen çemberinin teğeti olduğunu ispatlayınız.

Hesap makinesi kullanmak yasaktır!

3. TUR (25 DAKİKA)

3.1. *(7 puan)* 1 rakamı dışındaki, iki karşılıklı asal sayılar toplamı olarak ifade edilemeyen tüm pozitif doğal sayıları bulunuz.

3.2. *(7 puan)* Bir *l* doğrusu ve onun üzerinde olmayan *A* ve *B* noktaları verilmiştir. $AX^2 + BX^2$ ifadesinin en küçük sayıya eşit olacağı şekilde doğrunun üzerindeki *X* noktasını bulunuz.

3.3. *(7 puan)* Yan yana yazılan herhangi dört sayının toplamı negativ sayı ve tüm sayıların toplamı 171 olacak şekilde, 17 tane tam sayı bir satıra yazılabilirmi?

3.4. *(7 puan)* $a_1 = 1$ ve $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ denklemdeki *m* ve *n* herhangi doğal sayı ise $\{a_n\}$'nın tüm doğal sayı dizilerini bulunuz.

Hesap makinesi kullanmak yasaktır!

Математичний експрес

І ТУР (25 ХВИЛИН)

1.1. *(7 балів)* Чи існує таке натуральне число N, що рівняння

$$x_1^{2010} + x_2^{2010} + \ldots + x_{2010}^{2010} = N$$

не має розв'язків у цілих числах?

1.2. *(7 балів)* У трикутнику ABC $(AB < AC)$ кут BAC дорівнює α. На промені CA відмітили точку D так, що $CD = AB$. Через середини відрізків AD і BC провели пряму l. Знайдіть кут між прямими AB і l.

1.3. *(7 балів)* Доведіть нерівність

$$1 < \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} < 2.$$

1.4. *(7 балів)* Чи існують такі числа x і y, що кожне з чисел $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ і $x^2 + y^2$ — раціональне, а число $x + y$ — ірраціональне?

Користуватися мікрокалькуляторами забороняється!

ІІ ТУР (25 ХВИЛИН)

2.1. *(7 балів)* Знайдіть усі такі додатні числа x, що значення виразу $\frac{7x+3}{3x+8}$ — ціле число.

2.2. *(7 балів)* Додатні числа a, b і c такі, що $ab + bc + ac = \frac{3}{2}$. Доведіть нерівність

$$\frac{a}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{c}{\sqrt{1-a^2}} \geq 3.$$

2.3. *(7 балів)* Доведіть, що рівняння $x^{2010} + y^{2010} = z^{2011}$ має нескінченно багато розв'язків у натуральних числах.

2.4. *(7 балів)* У трикутнику ABC провели бісектрису AA_1 і висоту BB_1. Відомо, що $\angle AA_1B = 45°$. Доведіть, що пряма AA_1 є дотичною до описаного кола трикутника CB_1A_1.

Користуватися мікрокалькуляторами забороняється!

ІІІ ТУР (25 ХВИЛИН)

3.1. *(7 балів)* Знайдіть усі натуральні числа, які не можна подати у вигляді суми двох взаємно простих чисел, відмінних від 1?

3.2. *(7 балів)* Дана пряма l і дві точки A і B поза неї. Знайдіть на прямій таку точку X, для якої $AX^2 + BX^2$ набуває найменшого значення.

3.3. *(7 балів)* Чи можна записати у рядок 17 цілих чисел так, щоб сума будь-яких чотирьох сусідніх чисел була від'ємною, а сума всіх чисел дорівнювала 171?

3.4. *(7 балів)* Знайдіть усі послідовності натуральних чисел $\{a_n\}$ таких, що $a_1 = 1$ і для будь-яких натуральних чисел m і n виконується рівність $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$.

Користуватися мікрокалькуляторами забороняється!

Математический экспресс

I тур (25 минут)

1.1. *(7 баллов)* Существует ли такое натуральное число N, что уравнение

$$x_1^{2010} + x_2^{2010} + \ldots + x_{2010}^{2010} = N$$

не имеет решений в целых числах?

1.2. *(7 баллов)* В треугольнике ABC $(AB < AC)$ угол BAC равен α. На луче CA отметили точку D так, что $CD = AB$. Через середины отрезков AD и BC провели прямую l. Найдите угол между прямыми AB и l.

1.3. *(7 баллов)* Докажите неравенство

$$1 < \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} < 2.$$

1.4. *(7 баллов)* Существуют ли такие числа x и y, что каждое из чисел $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ и $x^2 + y^2$ — рациональное, а число $x + y$ — иррациональное?

Пользоваться микрокалькуляторами запрещается!

II тур (25 минут)

2.1. *(7 баллов)* Найдите все такие положительные числа x, что значение выражения $\frac{7x+3}{3x+8}$ — целое число.

2.2. *(7 баллов)* Положительные числа a, b и c таковы, что $ab + bc + ac = \frac{3}{2}$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{c}{\sqrt{1-a^2}} \geq 3.$$

2.3. *(7 баллов)* Докажите, что уравнение $x^{2010} + y^{2010} = z^{2011}$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

2.4. *(7 баллов)* В треугольнике ABC провели биссектрису AA_1 и высоту BB_1. Известно, что $\angle AA_1B = 45°$. Докажите, что прямая AA_1 является касательной к описанной окружности треугольника CB_1A_1.

Пользоваться микрокалькуляторами запрещается!

III тур (25 минут)

3.1. *(7 баллов)* Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от 1?

3.2. *(7 баллов)* Дана прямая l и две точки A и B вне ее. Найдите на прямой такую точку X, для которой $AX^2 + BX^2$ принимает наименьшее значение.

3.3. *(7 баллов)* Можно ли записать в строку 17 целых чисел так, чтобы сумма любых четырех соседних чисел была отрицательной, а сумма всех чисел равнялась 171?

3.4. *(7 баллов)* Найдите все последовательности натуральных чисел $\{a_n\}$ таких, что $a_1 = 1$ и для любых натуральных чисел m и n выполняется равенство $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$.

Пользоваться микрокалькуляторами запрещается!