**Любі учні!**

Вам пропонуються задачі проблемного туру. Оцінюватись будуть не тільки розв'язки однієї чи кількох задач, але й можливі узагальнення чи цікаві ідеї, які виникли при розв'язанні. На фестивалі будуть прочитані лекції, з яких ви дізнаєтесь про розв'язання цих задач та їх зв'язок із сучасною математикою.

**Дорогие школьники!**

Вам предлагаются задачи проблемного тура. Оцениваться будут не только решения одной или нескольких задач, но и возможные обобщения, а также интересные идеи, возникшие при решении. На фестивале будут прочитаны лекции, из которых вы узнаете о решении этих задач и их связи с современной математикой.

**Dear pupils!** We propose you tasks of the problem round. Not only solutions, but possible generalizations and interesting ideas appeared during solving will be evaluated. The lectures on each problem and its connection with modern mathematics will be presented during the Festival.

## Задача 1
## (А.А.Дороговцев)

На площині розташовано 2010 точок, які можна переміщати наступним чином. За один крок обирається одна з точок та переміщається в точку симетричну їй відносно центру ваги всієї системи точок*.

а) Припустимо, що спочатку всі попарні відстані між точками не перевищували 1. Чи можуть на якомусь кроці знайтись такі дві точки, відстань між якими буде більшою за 100?

б) Перевірити, що яким би чином не обирались точки системи на кожному кроці, на площині знайдеться така точка $C$, до якої збігається центр ваги системи. Тобто, для довільного додатного $\varepsilon$ знайдеться такий номер кроку, після якого центр ваги системи буде залишатись в кулі радіуса $\varepsilon$ з центром у $C$.

---

* Центр ваги системи точок $A_1, \ldots, A_n$ – це така точка $O$, що

$$\vec{OA_1} + \ldots + \vec{OA_n} = 0.$$

## Задача 1

## (А.А.Дороговцев)

На плоскости расположено 2010 точек, которые можно передвигать следующим образом. За один шаг выбирается одна из точек и переставляется в точку симметричную ей относительно центра тяжести всей системы точек*.
а) Предположим, что вначале все попарные расстояния между точками были не больше 1. Могут ли на на каком-то шаге найтись две такие точки системы, расстояние между которыми будет больше 100?
б) Проверить, что как бы не выбирались точки системы на каждом шаге, на плоскости найдется такая точка $C$, к которой сходится центр тяжести системы. Иными словами, для всякого положительного $\varepsilon$ найдется такой номер шага, после которого центр тяжести системы будет оставаться в круге радиуса $\varepsilon$ с центром в $C$.

---

* Центр тяжести системы точек $A_1, \ldots, A_n$ – это такая точка $O$, что

$$\vec{OA_1} + \ldots + \vec{OA_n} = 0.$$

## Problem 1

## (A.A.Dorogovtsev)

There are 2010 points on a plane. One moves them in the following way. At each step some point is selected and move it to the symmetric point with respect to the center of mass of the whole system *.
a) Assume that initially all pairwise distances between the points were less than or equal to 1. Can the distance between some two points of the system be greater than 100 at some step?
b) Prove that for any selection of a point at each step there exists a point $C$ such that the center of mass of the system converges to $C$. That is, for each positive $\varepsilon$ there is a step $n$ after which the center of mass will stay in the ball with its center in $C$ and radius $\varepsilon$.

---

* A point $O$ is called the center of mass of a collection of points $A_1, \ldots, A_n$ if

$$\vec{OA_1} + \ldots + \vec{OA_n} = 0.$$

## Задача 2

## (А.Ю.Пилипенко)

Змій Горинич народився нескінченно давно. В нього є 2 нескінченно багато свічок двох типів. Свічки першого типу горять рік, а другого 2 року. Коли свічка закінчується, Змій підкидає монету. Якщо випав орел, то він запалює свічку першого типу, а якщо решітка, то другого.
Баба Яга зайшла в гості до Змія Горинича 10.05.3010. Яка ймовірність того, що в той момент горіла свічка першого типу? Як зміниться відповідь, якщо у Змія Горинича свічки 6 типів такі, що свічка $i$ типу горить $i$ років та для вибору свічки Змій використовує гральний кубик?

## Задача 2

## (А.Ю.Пилипенко)

Кащей Бессмертный родился бесконечно давно. У него есть бесконечно много свечек двух типов. Свечки первого типа горят год, а второго типа 2 года. Когда очередная свечка кончается, Кащей подбрасывает монету. Если выпал орел, то Кащей зажигает свечку из первого типа, а если решка, то второго.
Баба Яга зашла в гости к Кащею 10.05.3010. Какая вероятность того, что в тот момент горела свечка из первого типа? Как изменится ответ, если у Кащея есть свечи 6 типов, свечи типа $i$ горят $i$ лет и для выбора свечи Кащей использует кубик?

## Problem 2

## (A.Yu.Pilipenko)

The Immortal Wizard was born infinitely many years ago. He has infinitely many candles of 2 types. A candle of the first type burns for one year, a candle of the second type burns for 2 years. The Wizard tosses a coin at the instant when a candle goes out. If he gets a head, then the Wizard lights a candle of the first type. Otherwise he lights a candle of the second type. What is the probability that a candle of the first type will be burning on 10.05.3010? How would the answer change if the Wizard had candles of 6 types, a candle of type $i \in \{1, ..., 6\}$ is burning for $i$ years? The type of a candle is chosen by tossing a dice.

## Задача 3

## (О.М.Кулик)

*Середнім арифметичним двох точок* на площині називатимемо середину відрізку, що їх сполучає. *Середнім арифметичним* $\frac{Q+R}{2}$ *двох фігур* $Q$ *та* $R$ будемо називати множину середніх арифметичних всіх пар точок $A$ з $Q$ і $B$ з $R$. Нехай $Q = \Delta_1$ и $R = \Delta_2$ – два трикутники.

1. Доведіть, що $\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$ – опуклий $n$-кутник. Які значення може приймати число $n$ при різному виборі трикутників?
2. Нехай відомо, що трикутники $\Delta_1$, $\Delta_2$ мають одиничну площу. Які значення може приймати площа $\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$?
3. Нехай відомо, що трикутники $\Delta_1$, $\Delta_2$ мають одиничний периметр. Які значення може приймати периметр $\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$?

## Задача 3

## (А.М.Кулик)

*Средним арифметическим двух точек* на плоскости будем называть середину соединяющего их отрезка. *Средним арифметическим* $\frac{Q+R}{2}$ *двух фигур* $Q$ *и* $R$ будем называть множество средних арифметических всех пар точек $A$ из $Q$ и $B$ из $R$. Пусть $Q = \Delta_1$ и $R = \Delta_2$ – два треугольника.

1. Докажите, что $\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$ – выпуклый $n$-угольник. Какие значения может принимать число $n$ при разном выборе треугольников?
2. Пусть известно, что треугольники $\Delta_1$, $\Delta_2$ имеют единичную площадь. Какие значения может принимать площадь $\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$?
3. Пусть известно, что треугольники $\Delta_1$, $\Delta_2$ имеют единичный периметр. Какие значения может принимать периметр $\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$?

## Problem 3

## (A.M.Kulik)

*The mean value of two points* on a plane is the middle of the respective segment. *The mean value* $\frac{Q+R}{2}$ *of two figures* $Q$ *and* $R$ is the set of mean values for all pairs $A$ from $Q$ and $B$ from $R$. Let $Q = \Delta_1$ and $R = \Delta_2$ be two triangles.

1. Prove that $\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$ is a convex polygon. What are the possible values for the number $n$ of its vertices under various choices of the triangles?
2. Assume that the triangles $\Delta_1$, $\Delta_2$ have unit area. What are the possible values for the area of $\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$?
3. Assume that the triangles $\Delta_1$, $\Delta_2$ have unit perimeter. What are the possible values for the perimeter of $\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$?