1.1. Существует ли такое натуральное число N, что уравнение $x_1^{2010}+x_2^{2010}+\ldots+x_{2010}^{2010}=N$ не имеет решений в целых числах?

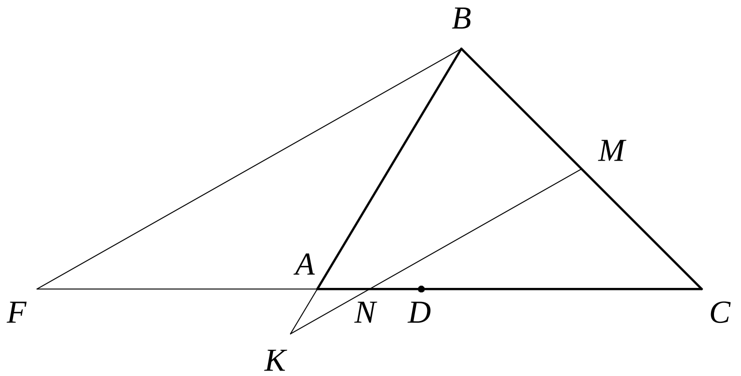
ОТВЕТ. Существует. Например, $N=2011$.

РЕШЕНИЕ. Действительно, если все $x_i\in\{-1;\,0;\,1\}$, то $x_1^{2010}+x_2^{2010}+\ldots+x_{2010}^{2010}\le 2010$, если для некоторых i $|x_i|>1$, то $x_1^{2010}+x_2^{2010}+\ldots+x_{2010}^{2010}\ge 2^{2010}$.

1.2. В треугольнике ABC $(AB<AC)$ угол BAC равен α. На луче CA отметили точку D так, что $CD=AB$. Через середины отрезков AD и BC провели прямую l. Найдите угол между прямыми AB и l.

ОТВЕТ. $\frac{1}{2}\alpha$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим M и N середины отрезков BC и AD соответственно (рис.), K — точка пересечения MN и BA. На прямой CA отметим точку F так, что $AF=AB$. Тогда $\angle ABF = \angle AFB=\frac{1}{2}\alpha$. Поскольку MN — средняя линия треугольника BCF, то $MK\parallel BF$. Тогда $\angle BKM = \angle ABF=\frac{1}{2}\alpha$.



1.3. Докажите неравенство $1<\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{42}+\frac{1}{43}<2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно записать:

$$11\cdot\frac{1}{21}<\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{21}<11\cdot\frac{1}{11};\qquad 22\cdot\frac{1}{43}<\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\ldots+\frac{1}{43}<22\cdot\frac{1}{22}.$$

Поскольку $1<\frac{11}{21}+\frac{22}{43}$ и $11\cdot\frac{1}{11}+22\cdot\frac{1}{22}=2$, имеем:

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{21}<1;\qquad \frac{1}{2}<\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\ldots+\frac{1}{43}<1.$$

Осталось сложить полученные неравенства.

1.4. Существуют ли такие числа x и y, что каждое из чисел $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ и x^2+y^2 — рациональное, а число $x+y$ — иррациональное?

ОТВЕТ. Да.

УКАЗАНИЕ. В качестве подходящих чисел можно выбрать, например, корни t_1 и t_2 уравнения $t^2-(1-\sqrt{2})t+1-\sqrt{2}=0$. Действительно, $t_1+t_2=1-\sqrt{2}$, $t_1t_2=1-\sqrt{2}$. Отсюда $t_1^2+t_2^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=1-2\sqrt{2}+2-2(1-\sqrt{2})=1$.

2.1. Найдите все такие положительные числа x, что значение выражения $\dfrac{7x+3}{3x+8}$ — целое число.

ОТВЕТ. $x=\dfrac{5}{4}$ или $x=13$.

РЕШЕНИЕ. Пусть $\dfrac{7x+3}{3x+8}=n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Имеем: $7x+3=3xn+8n$, $(7-3n)x=8n-3$, $x=\dfrac{8n-3}{7-3n}$. Поскольку $x>0$, то $\dfrac{3}{8}<n<\dfrac{7}{3}$. Остается рассмотреть два случая:

1) $n=1$. Тогда $x=\dfrac{5}{4}$;

2) $n=2$. Тогда $x=13$.

2.2. Положительные числа a, b и c таковы, что $ab+bc+ac=\dfrac{3}{2}$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{1-b^2}}+\frac{b}{\sqrt{1-c^2}}+\frac{c}{\sqrt{1-a^2}}\geq 3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что $\dfrac{a}{\sqrt{1-b^2}}\geq 2ab$; $\dfrac{b}{\sqrt{1-c^2}}\geq 2bc$; $\dfrac{c}{\sqrt{1-a^2}}\geq 2ca$. Остается сложить записанные неравенства.

2.3. Докажите, что уравнение $x^{2010}+y^{2010}=z^{2011}$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x=y=2^t$, где $t\in\mathbb{N}$. Запишем $x^{2010}+y^{2010}=x^{2010t}+2^{2010t}=2\cdot 2^{2010t}=$ $=2^{2010t+1}$. Теперь ясно, что любая тройка чисел $(2^{2010z}, 2^{2010z}, 2^{2010z+1})$ является решением данного уравнения.

2.4. В треугольнике ABC провели биссектрису AA_1 и высоту BB_1. Известно, что $\angle AA_1B=45°$. Докажите, что прямая AA_1 является касательной к описанной окружности треугольника CB_1A_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем B_1K и BN — биссектрисы углов треугольника AB_1B (рис.), F — точка пересечения этих биссектрис. Поскольку $\angle FB_1B=\angle FA_1B=$ $=45°$, то четырехугольник FB_1A_1B — вписанный. Кроме того,

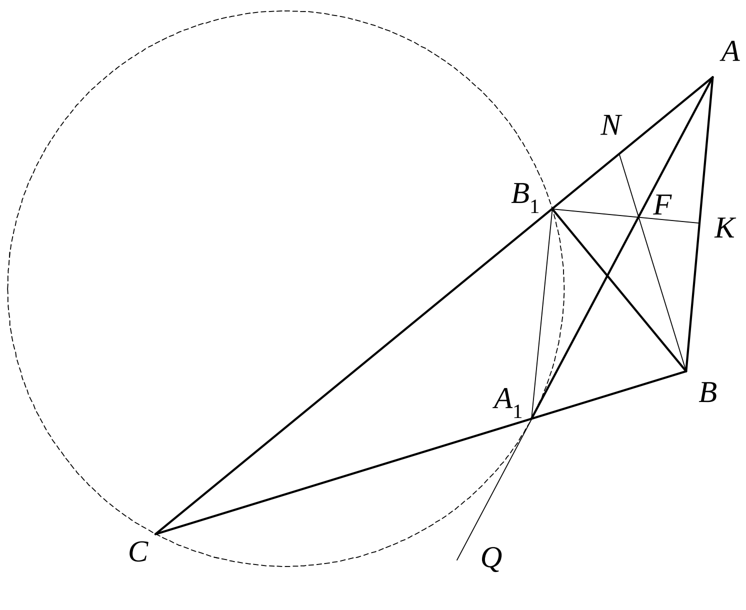
$$\angle AFB=90°+\frac{1}{2}\angle AB_1B=135°.$$

Отсюда $\angle A_1B_1B=\angle A_1FB=45°$. Имеем:

$$\angle AB_1A_1=\angle AB_1B+\angle A_1B_1B=135°,$$

$$\angle CB_1A_1=45°.$$

Поскольку $\angle CB_1A_1=\angle CA_1Q$, то AA_1 — касательная к описанной окружности треугольника CB_1A_1.



3.1. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от 1?

ОТВЕТ. 1, 2, 3, 4, 6.

РЕШЕНИЕ. То, что числа 1, 2, 3, 4, 6 нужным образом представить нельзя — очевидно. Покажем, что число 5 и любое натуральное число больше 6 можно представить в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от 1. Если $n = 2k+1$, где $k > 1$, то $n = k + (k+1)$. Если $n = 4k$ или $n = 4k+2$ $(k > 1)$, то подходящие представления имеют, соответственно, вид $(2k-1)+(2k+1)$ и $(2k-1)+(2k+3)$. Действительно, $\text{НОД}(2k-1;\ 2k+1) = \text{НОД}(2k-1;\ 2) = 1$, $\text{НОД}(2k-1;\ 2k+3) = \text{НОД}(2k-1;\ 4) = 1$.

3.2. Дана прямая l и две точки A и B вне ее. Найдите на прямой такую точку X, для которой $AX^2 + BX^2$ принимает наименьшее значение.

РЕШЕНИЕ. Пусть M — середина AB. Тогда $AX^2 + BX^2 = AB^2 + 4XM^2$. Ясно, что величина $AX^2 + BX^2$ достигает своего наименьшего значения при наименьшем значении длины отрезка XM. Тогда X — основание перпендикуляра, проведенного из точки M на прямую l.

3.3. Можно ли записать в строку 17 целых чисел так, чтобы сумма любых четырех соседних чисел была отрицательной, а сумма всех чисел равнялась 171?

ОТВЕТ. Можно.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим последовательность $a,\ a,\ a,\ b,\ a,\ a,\ a,\ b,\ \ldots,\ b,\ a$. Должны выполняться условия $3a + b < 0$, $4b + 13a = 171$. Отсюда $4b = 171 - 13a < -12a$. Имеем: $a > 171$. Кроме того, число $171 - 13a$ кратно 4. Тогда $a \equiv 3 \pmod 4$. Можно, например, выбрать $a = 175$. Имеем: $4b + 13\cdot 175 = 171$, $b = -526$.

3.4. Найдите все последовательности натуральных чисел $\{a_n\}$ таких, что $a_1 = 1$ и для любых натуральных чисел m и n выполняется равенство $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$.

РЕШЕНИЕ. Пусть $m = 1$. Имеем: $a_{n+1} - a_n = 1 + n$. Подставляя последовательно в полученное равенство числа: 1, 2, 3, …, $n-1$, запишем: $a_2 - a_1 = 2$; $a_3 - a_2 = 3$; …; $a_n - a_{n-1} = n$. Сложив эти равенства, получаем: $a_n - a_1 = 2 + 3 + \ldots + n$. Отсюда $a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Проверка показывает, что полученная последовательность удовлетворяет условию задачи.