IX КИЇВСЬКИЙ МІЖНАРОДНИЙ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФЕСТИВАЛЬ

Усна математична олімпіада. 10 клас. Основні задачі

1. Покажіть, що існує набір з 2010 різних натуральних чисел таких, що жодне з них, а також жодна з сум декількох з них, не є n-им степенем натурального числа $(n \in \mathbb{N},\ n > 1)$.

2. Нехай $ABCDE$ — правильний п'ятикутник такий, що зірка $ACEBD$ має площу 2010. Нехай P — точка перетину прямих AC і BE, а Q — точка перетину BD і CE. Знайдіть площу чотирикутника $APQD$.

3. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, які задовольняють рівність $f(2f(n)) = n + 2010$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ (через $\mathbb{N}_0$ позначено множину $\mathbb{N} \cup \{0\}$).

4. У шаховому турнірі кожен гравець зіграв з кожним іншим одну партію. За перемогу гравець отримує 1 очко, за нічию — $\frac{1}{2}$ очка, за поразку — 0 очок. У турнірі приймали участь чоловіки та жінки, причому кожен гравець набрав однакову сумарну кількість очок у партіях з чоловіками та у партіях з жінками. Доведіть, що загальна кількість гравців є точним квадратом.

7 травня 2010 року

IX КИЇВСЬКИЙ МІЖНАРОДНИЙ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФЕСТИВАЛЬ

Усна математична олімпіада. 10 клас. Основні задачі

1. Покажіть, що існує набір з 2010 різних натуральних чисел таких, що жодне з них, а також жодна з сум декількох з них, не є n-им степенем натурального числа $(n \in \mathbb{N},\ n > 1)$.

2. Нехай $ABCDE$ — правильний п'ятикутник такий, що зірка $ACEBD$ має площу 2010. Нехай P — точка перетину прямих AC і BE, а Q — точка перетину BD і CE. Знайдіть площу чотирикутника $APQD$.

3. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, які задовольняють рівність $f(2f(n)) = n + 2010$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ (через $\mathbb{N}_0$ позначено множину $\mathbb{N} \cup \{0\}$).

4. У шаховому турнірі кожен гравець зіграв з кожним іншим одну партію. За перемогу гравець отримує 1 очко, за нічию — $\frac{1}{2}$ очка, за поразку — 0 очок. У турнірі приймали участь чоловіки та жінки, причому кожен гравець набрав однакову сумарну кількість очок у партіях з чоловіками та у партіях з жінками. Доведіть, що загальна кількість гравців є точним квадратом.

7 травня 2010 року

IX КИЇВСЬКИЙ МІЖНАРОДНИЙ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФЕСТИВАЛЬ

Усна математична олімпіада. 10 клас. Додаткові задачі

5. Доведіть, що для довільних натуральних m та n $(m, n \geq 2)$ виконується нерівність $\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$

6. Прямокутник $n \times p$ розділений на np одиничних клітинок, m з яких чорні, а інші — білі. За один крок дозволяється перефарбувати у чорний колір довільну білу клітинку, що має принаймні дві сусідні за стороною чорні клітинки. Знайдіть найменше можливе m, за якого знайдеться таке початкове пофарбування прямокутника, що за скінченну кількість кроків усі клітинки стануть чорними.

7 травня 2010 року

IX КИЇВСЬКИЙ МІЖНАРОДНИЙ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФЕСТИВАЛЬ

Усна математична олімпіада. 10 клас. Додаткові задачі

5. Доведіть, що для довільних натуральних m та n $(m, n \geq 2)$ виконується нерівність $\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$

6. Прямокутник $n \times p$ розділений на np одиничних клітинок, m з яких чорні, а інші — білі. За один крок дозволяється перефарбувати у чорний колір довільну білу клітинку, що має принаймні дві сусідні за стороною чорні клітинки. Знайдіть найменше можливе m, за якого знайдеться таке початкове пофарбування прямокутника, що за скінченну кількість кроків усі клітинки стануть чорними.

7 травня 2010 року

IX КИЇВСЬКИЙ МІЖНАРОДНИЙ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФЕСТИВАЛЬ

Усна математична олімпіада. 10 клас. Додаткові задачі

5. Доведіть, що для довільних натуральних m та n $(m, n \geq 2)$ виконується нерівність $\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$

6. Прямокутник $n \times p$ розділений на np одиничних клітинок, m з яких чорні, а інші — білі. За один крок дозволяється перефарбувати у чорний колір довільну білу клітинку, що має принаймні дві сусідні за стороною чорні клітинки. Знайдіть найменше можливе m, за якого знайдеться таке початкове пофарбування прямокутника, що за скінченну кількість кроків усі клітинки стануть чорними.

7 травня 2010 року

IX КИЕВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ

Устная математическая олимпиада. 10 класс. Основные задачи

1. Покажите, что существует набор из 2010 различных натуральных чисел таких, что ни одно из них, а также ни одна из сумм нескольких из них, не является n-ной степенью натурального числа ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$).

2. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник такой, что звезда $ACEBD$ имеет площадь 2010. Пусть P — точка пересечения прямых AC и BE, а Q — точка пересечения BD и CE. Найдите площадь четырехугольника $APQD$.

3. Найдите все функции $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, удовлетворяющие равенству $f(2f(n)) = n + 2010$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$ (здесь $\mathbb{N}_0$ обозначает множество $\mathbb{N} \cup \{0\}$).

4. В шахматном турнире каждый игрок сыграл с каждым другим одну партию. За победу игрок получает 1 очко, за ничью — $\frac{1}{2}$ очка, за поражение — 0 очков. В турнире принимали участие мужчины и женщины, причем каждый игрок набрал одинаковое суммарное количество очков в партиях с мужчинами и в партиях с женщинами. Докажите, что общее количество игроков является точным квадратом.

7 мая 2010 года

IX КИЕВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ

Устная математическая олимпиада. 10 класс. Основные задачи

1. Покажите, что существует набор из 2010 различных натуральных чисел таких, что ни одно из них, а также ни одна из сумм нескольких из них, не является n-ной степенью натурального числа ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$).

2. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник такой, что звезда $ACEBD$ имеет площадь 2010. Пусть P — точка пересечения прямых AC и BE, а Q — точка пересечения BD и CE. Найдите площадь четырехугольника $APQD$.

3. Найдите все функции $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, удовлетворяющие равенству $f(2f(n)) = n + 2010$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$ (здесь $\mathbb{N}_0$ обозначает множество $\mathbb{N} \cup \{0\}$).

4. В шахматном турнире каждый игрок сыграл с каждым другим одну партию. За победу игрок получает 1 очко, за ничью — $\frac{1}{2}$ очка, за поражение — 0 очков. В турнире принимали участие мужчины и женщины, причем каждый игрок набрал одинаковое суммарное количество очков в партиях с мужчинами и в партиях с женщинами. Докажите, что общее количество игроков является точным квадратом.

7 мая 2010 года

IX КИЕВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ

Устная математическая олимпиада. 10 класс. Дополнительные задачи

5. Докажите, что для произвольных натуральных m и n $(m, n \geq 2)$ выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$

6. Прямоугольник $n \times p$ разделен на np единичных клеточек, m из которых черные, а остальные — белые. За один шаг разрешается перекрасить в черный цвет произвольную белую клеточку, имеющую хотя бы две соседние по стороне черные клеточки. Найдите наименьшее возможное m, при котором найдется такая начальная покраска прямоугольника, что за конечное количество шагов все клеточки станут черными.

7 мая 2010 года

IX КИЕВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ

Устная математическая олимпиада. 10 класс. Дополнительные задачи

5. Докажите, что для произвольных натуральных m и n $(m, n \geq 2)$ выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$

6. Прямоугольник $n \times p$ разделен на np единичных клеточек, m из которых черные, а остальные — белые. За один шаг разрешается перекрасить в черный цвет произвольную белую клеточку, имеющую хотя бы две соседние по стороне черные клеточки. Найдите наименьшее возможное m, при котором найдется такая начальная покраска прямоугольника, что за конечное количество шагов все клеточки станут черными.

7 мая 2010 года

IX КИЕВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ

Устная математическая олимпиада. 10 класс. Дополнительные задачи

5. Докажите, что для произвольных натуральных m и n $(m, n \geq 2)$ выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$

6. Прямоугольник $n \times p$ разделен на np единичных клеточек, m из которых черные, а остальные — белые. За один шаг разрешается перекрасить в черный цвет произвольную белую клеточку, имеющую хотя бы две соседние по стороне черные клеточки. Найдите наименьшее возможное m, при котором найдется такая начальная покраска прямоугольника, что за конечное количество шагов все клеточки станут черными.

7 мая 2010 года

IX KYIV INTERNATIONAL PHYSICS AND MATHEMATICS FESTIVAL

Oral mathematics Olympiad. 10th form. Main problems

1. Show that there is a set of 2010 distinct positive integers such that the sum of one or more elements of the set is never a square, cube, or higher power.

2. Let $ABCDE$ be a regular pentagon such that the star $ACEBD$ has area 2010. Let P be the point of intersection of AC and BE and Q be the point of intersection of BD and CE. Find the area of $APQD$.

3. Let $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Find all functions $f : N \to N$ which satisfy $f(2f(n)) = n + 2010$ for all n.

4. In a chess tournament each player plays every other player once. A player gets 1 point for a win, 1/2 point for a draw and 0 for a loss. Both men and women played in the tournament and each player scored the same total of points against women as against men. Show that the total number of players must be a square.

May 7^{th}, 2010

IX KYIV INTERNATIONAL PHYSICS AND MATHEMATICS FESTIVAL

Oral mathematics Olympiad. 10th form. Main problems

1. Show that there is a set of 2010 distinct positive integers such that the sum of one or more elements of the set is never a square, cube, or higher power.

2. Let $ABCDE$ be a regular pentagon such that the star $ACEBD$ has area 2010. Let P be the point of intersection of AC and BE and Q be the point of intersection of BD and CE. Find the area of $APQD$.

3. Let $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Find all functions $f : N \to N$ which satisfy $f(2f(n)) = n + 2010$ for all n.

4. In a chess tournament each player plays every other player once. A player gets 1 point for a win, 1/2 point for a draw and 0 for a loss. Both men and women played in the tournament and each player scored the same total of points against women as against men. Show that the total number of players must be a square.

May 7^{th}, 2010

IX KYIV INTERNATIONAL PHYSICS AND MATHEMATICS FESTIVAL

Oral mathematics Olympiad. 10th form. Additional problems

5. Prove that for all positive integers m and n $(m, n \geq 2)$ the following inequality $\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}>1$ holds.

6. The $n \times p$ rectangle is divided into np unit squares. There are m black unit squares and the remaining unit squares are white. The following "move" is allowed: the white unit square having a common side with at least two black unit squares is painted in black. Find the least possible integer m with the property that there exists a starting pattern of black unit squares such that, after finitely many allowed moves, all the unit squares become black.

May 7th, 2010

IX KYIV INTERNATIONAL PHYSICS AND MATHEMATICS FESTIVAL

Oral mathematics Olympiad. 10th form. Additional problems

5. Prove that for all positive integers m and n $(m, n \geq 2)$ the following inequality $\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}>1$ holds.

6. The $n \times p$ rectangle is divided into np unit squares. There are m black unit squares and the remaining unit squares are white. The following "move" is allowed: the white unit square having a common side with at least two black unit squares is painted in black. Find the least possible integer m with the property that there exists a starting pattern of black unit squares such that, after finitely many allowed moves, all the unit squares become black.

May 7th, 2010

IX KYIV INTERNATIONAL PHYSICS AND MATHEMATICS FESTIVAL

Oral mathematics Olympiad. 10th form. Additional problems

5. Prove that for all positive integers m and n $(m, n \geq 2)$ the following inequality $\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}>1$ holds.

6. The $n \times p$ rectangle is divided into np unit squares. There are m black unit squares and the remaining unit squares are white. The following "move" is allowed: the white unit square having a common side with at least two black unit squares is painted in black. Find the least possible integer m with the property that there exists a starting pattern of black unit squares such that, after finitely many allowed moves, all the unit squares become black.

May 7th, 2010