VIII КИЇВСЬКИЙ МІЖНАРОДНИЙ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФЕСТИВАЛЬ
Усна математична олімпіада. 10 клас. Основні задачі

1. У трапеції $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ на сторонах AB та CD взято точки M та N відповідно, такі, що $\angle BAN = \angle CDM$. Доведіть, що $\angle BNA = \angle CMD$.

2. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких виконуються умови:
(1) $f(2x) = f(x+y)f(y-x) + f(x-y)f(-x-y)$ для всіх дійсних x та y;
(2) $f(x) \geq 0$ для всіх дійсних x.

3. Знайдіть всі прості числа p, для яких $5^p + 4p^4$ є квадратом натурального числа.

4. Розглянемо шахову дошку 2009×2009. Нехай n — найменша кількість прямокутників, які можна намалювати на цій дошці так, щоб кожна сторона будь-якої клітинки на дошці містилась на стороні хоча б одного з цих прямокутників. Знайдіть n.

8 травня 2009 року

VIII КИЇВСЬКИЙ МІЖНАРОДНИЙ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФЕСТИВАЛЬ
Усна математична олімпіада. 10 клас. Основні задачі

1. У трапеції $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ на сторонах AB та CD взято точки M та N відповідно, такі, що $\angle BAN = \angle CDM$. Доведіть, що $\angle BNA = \angle CMD$.

2. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких виконуються умови:
(1) $f(2x) = f(x+y)f(y-x) + f(x-y)f(-x-y)$ для всіх дійсних x та y;
(2) $f(x) \geq 0$ для всіх дійсних x.

3. Знайдіть всі прості числа p, для яких $5^p + 4p^4$ є квадратом натурального числа.

4. Розглянемо шахову дошку 2009×2009. Нехай n — найменша кількість прямокутників, які можна намалювати на цій дошці так, щоб кожна сторона будь-якої клітинки на дошці містилась на стороні хоча б одного з цих прямокутників. Знайдіть n.

8 травня 2009 року

VIII КИЇВСЬКИЙ МІЖНАРОДНИЙ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФЕСТИВАЛЬ
Усна математична олімпіада. 10 клас. Додаткові задачі

5. Многочлен $f(x)=x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+3$ з дійсними коефіцієнтами має 6 дійсних від'ємних коренів (можливо, кратних). Доведіть, що $f(2)\geq 27^2$.

6. У гострокутному трикутнику ABC M — внутрішня точка відрізка AC, а N — точка на продовженні сторони AC, причому $MN=AC$. Нехай D та E — основи перпендикулярів, опущених з точок M та N на прямі BC та AB відповідно. Доведіть, що ортоцентр трикутника ABC лежить на колі, описаному навколо трикутника BED.

8 травня 2009 року

VIII КИЇВСЬКИЙ МІЖНАРОДНИЙ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФЕСТИВАЛЬ
Усна математична олімпіада. 10 клас. Додаткові задачі

5. Многочлен $f(x)=x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+3$ з дійсними коефіцієнтами має 6 дійсних від'ємних коренів (можливо, кратних). Доведіть, що $f(2)\geq 27^2$.

6. У гострокутному трикутнику ABC M — внутрішня точка відрізка AC, а N — точка на продовженні сторони AC, причому $MN=AC$. Нехай D та E — основи перпендикулярів, опущених з точок M та N на прямі BC та AB відповідно. Доведіть, що ортоцентр трикутника ABC лежить на колі, описаному навколо трикутника BED.

8 травня 2009 року

VIII КИЇВСЬКИЙ МІЖНАРОДНИЙ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФЕСТИВАЛЬ
Усна математична олімпіада. 10 клас. Додаткові задачі

5. Многочлен $f(x)=x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+3$ з дійсними коефіцієнтами має 6 дійсних від'ємних коренів (можливо, кратних). Доведіть, що $f(2)\geq 27^2$.

6. У гострокутному трикутнику ABC M — внутрішня точка відрізка AC, а N — точка на продовженні сторони AC, причому $MN=AC$. Нехай D та E — основи перпендикулярів, опущених з точок M та N на прямі BC та AB відповідно. Доведіть, що ортоцентр трикутника ABC лежить на колі, описаному навколо трикутника BED.

8 травня 2009 року

VIII КИЕВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ

Устная математическая олимпиада. 10 класс. Основные задачи

1. В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ на сторонах AB и CD взяты точки M и N соответственно, такие, что $\angle BAN = \angle CDM$. Докажите, что $\angle BNA = \angle CMD$.

2. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых выполняются условия:

(1) $f(2x) = f(x+y)f(y-x) + f(x-y)f(-x-y)$ для всех действительных x и y;

(2) $f(x) \geq 0$ для всех действительных x.

3. Найдите все простые числа p, для которых $5^p + 4p^4$ является квадратом натурального числа.

4. Рассмотрим шахматную доску 2009×2009. Пусть n — наименьшее количество прямоугольников, которые можно нарисовать на этой доске так, чтобы каждая сторона любой клеточки на доске находилась на стороне хотя бы одного из этих прямоугольников. Найдите n.

8 мая 2009 года

VIII КИЕВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ

Устная математическая олимпиада. 10 класс. Основные задачи

1. В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ на сторонах AB и CD взяты точки M и N соответственно, такие, что $\angle BAN = \angle CDM$. Докажите, что $\angle BNA = \angle CMD$.

2. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых выполняются условия:

(1) $f(2x) = f(x+y)f(y-x) + f(x-y)f(-x-y)$ для всех действительных x и y;

(2) $f(x) \geq 0$ для всех действительных x.

3. Найдите все простые числа p, для которых $5^p + 4p^4$ является квадратом натурального числа.

4. Рассмотрим шахматную доску 2009×2009. Пусть n — наименьшее количество прямоугольников, которые можно нарисовать на этой доске так, чтобы каждая сторона любой клеточки на доске находилась на стороне хотя бы одного из этих прямоугольников. Найдите n.

8 мая 2009 года

VIII КИЕВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ
Устная математическая олимпиада. 10 класс. Дополнительные задачи

5. Многочлен $f(x)=x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+3$ с действительными коэффициентами имеет 6 действительных отрицательных корней (возможно, кратных). Докажите, что $f(2)\geq 27^2$.

6. В остроугольном треугольнике ABC M — внутренняя точка отрезка AC, а N — точка на продолжении стороны AC, причем $MN=AC$. Пусть D и E — основания перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые BC и AB соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на окружности, описанной около треугольника BED.

8 мая 2009 года

VIII КИЕВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ
Устная математическая олимпиада. 10 класс. Дополнительные задачи

5. Многочлен $f(x)=x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+3$ с действительными коэффициентами имеет 6 действительных отрицательных корней (возможно, кратных). Докажите, что $f(2)\geq 27^2$.

6. В остроугольном треугольнике ABC M — внутренняя точка отрезка AC, а N — точка на продолжении стороны AC, причем $MN=AC$. Пусть D и E — основания перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые BC и AB соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на окружности, описанной около треугольника BED.

8 мая 2009 года

VIII КИЕВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ
Устная математическая олимпиада. 10 класс. Дополнительные задачи

5. Многочлен $f(x)=x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+3$ с действительными коэффициентами имеет 6 действительных отрицательных корней (возможно, кратных). Докажите, что $f(2)\geq 27^2$.

6. В остроугольном треугольнике ABC M — внутренняя точка отрезка AC, а N — точка на продолжении стороны AC, причем $MN=AC$. Пусть D и E — основания перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые BC и AB соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на окружности, описанной около треугольника BED.

8 мая 2009 года