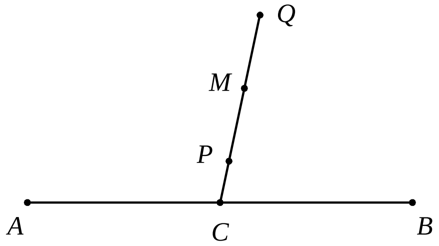
1.1. Докажите, что число $2^{98}+1$ кратно числу $2^{49}+2^{25}+1$.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО</u>.

$$2^{98}+1=2^{98}+2\cdot 2^{49}+1-2^{50}=(2^{49}+1)^2-(2^{25})^2=(2^{49}+1+2^{25})(2^{49}+1-2^{25})\,\vdots\,(2^{49}+2^{25}+1).$$

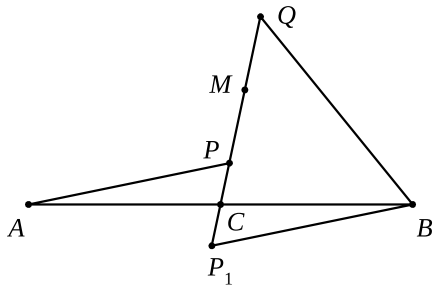
1.2. Числа p_1, p_2, q_1, q_2 таковы, что $p_1p_2=2(q_1+q_2)$. Докажите, что по крайней мере одно из уравнений $x^2+p_1x+q_1=0$, $x^2+p_2x+q_2=0$ имеет решение.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО</u>. Предположим, что $p_1^2<4q_1$, $p_2^2<4q_2$. Ясно, что $q_1>0$ и $q_2>0$. Можно записать $p_1^2p_2^2<16q_1q_2\le 4(q_1+q_2)^2=p_1^2p_2^2$. Получено противоречие.



1.3. Точка C — середина отрезка AB. На луче CQ (рис.) отметили точки P и M так, что $PM=MQ$. Докажите, что $AP+BQ>2CM$.

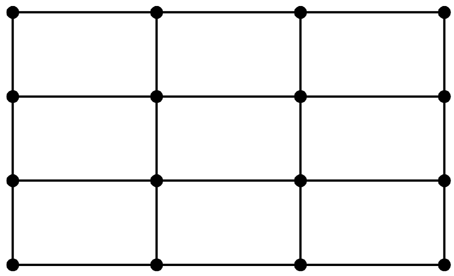
<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО</u>. Пусть P_1 — образ точки P при симметрии относительно точки C (рис.). Тогда $P_1B=AP$, $P_1Q=2CM$. Имеем: $AP+BQ=P_1B+BQ>P_1Q=2CM$.



1.4. Можно ли подобрать компанию из 16 человек, в которой у каждого человека было бы ровно 6 друзей, а у любых двух человек — ровно 2 общих друга?

<u>ОТВЕТ</u>. Можно.

<u>РЕШЕНИЕ</u>. Рассмотрим граф, изображенный на рис.



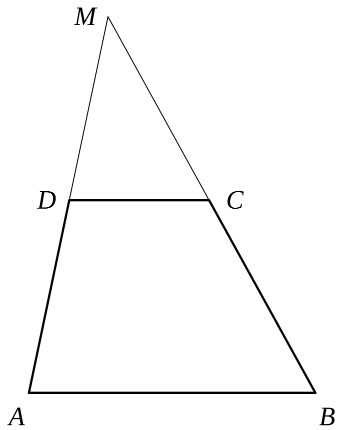
Каждый человек в компании дружит с теми и только с теми, кто стоит с ним в одном ряду или столбце.

2.1. Действительные числа $a,\ b,\ c,\ d$ таковы, что для любого натурального n выполняется равенство $a^n+b^n=c^n+d^n$. Верно ли, что выполняется одно из условий: $a=c,\ b=d$ или $a=d,\ b=c$?

ОТВЕТ. Верно.

РЕШЕНИЕ. Из условия следует, что $a+b=c+d$ и $a^2+b^2=c^2+d^2$. Отсюда легко получить, что $ab=cd$, а значит, как числа a и b, так числа c и d — корни одного и того же квадратного уравнения.

2.2. В трапеции $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ прямая BC является касательной к описанной окружности треугольника ABD. Докажите, что прямая AD — касательная к описанной окружности треугольника BCD.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — точка пересечения боковых сторон AD и BC (рис.). Из условия следует, что $MA\cdot MD=MB^2$. Отсюда

$$\frac{MA}{MB}=\frac{MB}{MD}.$$

Из подобия треугольников AMB и DMC получаем $\frac{MA}{MB}=\frac{MD}{MC}$. Тогда

$$\frac{MB}{MD}=\frac{MD}{MC},$$

откуда $MB\cdot MC=MD^2$.

2.3. Натуральные числа $a,\ b,\ c$ таковы, что число $a+b+c$ — простое, а число $a^2+b^2+c^2$ делится нацело на число $ab+bc+ac$. Найдите числа $a,\ b$ и c.

ОТВЕТ. $a=1,\ b=1,\ c=1$.

РЕШЕНИЕ. Запишем $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$. Следовательно, число $ab+bc+ac$ — делитель числа $(a+b+c)^2$, которое имеет лишь три натуральных делителя: 1, $a+b+c$, $(a+b+c)^2$. Осталось рассмотреть три случая:

1) $ab+bc+ac=1$;
2) $ab+bc+ac=a+b+c$;
3) $ab+bc+ac=(a+b+c)^2$.

Очевидно, первое и третье равенства невозможны, а второе выполняется при условии $a=b=c=1$.

2.4. Существует ли выпуклый семиугольник, у которого каждая из диагоналей перпендикулярна какой-либо другой диагонали?

ОТВЕТ. Существует.

УКАЗАНИЕ. Рассмотрите правильный восьмиугольник $A_1A_2\ldots A_8$ и отрежьте от него треугольник $A_1A_2A_3$.

3.1. Найдите сумму цифр всех трехзначных чисел.

ОТВЕТ. 12600.

РЕШЕНИЕ. Разобьем все числа от 0 до 999 на пары: (0; 999), (1; 998), …, (499; 500). Сумма цифр каждой пары равна 27. Осталось из числа $500 \cdot 27$ вычесть сумму цифр всех чисел от 0 до 99, которая равна $50 \cdot 18$.

3.2. Десятичная запись каждого из чисел 2^n и 5^n $(n \in \mathbb{N})$ начинается с одной и той же цифры. Найдите эту цифру.

ОТВЕТ. 3.

РЕШЕНИЕ. Пусть искомая цифра равна a. Тогда существуют такие натуральные числа k и l, что $a \cdot 10^k < 2^n < (a+1) \cdot 10^k$, $a \cdot 10^l < 5^n < (a+1) \cdot 10^l$. Умножим почленно полученные неравенства. Имеем: $a^2 \cdot 10^{k+l} < 10^n < (a+1)^2 \cdot 10^{k+l}$. Отсюда

$$a^2 < 10^{n-k-l} < (a+1)^2.$$

Последнее неравенство возможно лишь при $a = 3$. Осталось привести пример.

3.3. Положительные числа a, b и c таковы, что $abc = a^4 + b^4 + c^4$. Докажите, что $ab + bc + ac \le \frac{1}{3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применив дважды неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$, получим

$$a^4 + b^4 + c^4 \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \ge ab^2c + bc^2a + ca^2b = abc(a+b+c).$$

Тогда $abc \ge abc(a+b+c)$, откуда $0 < a+b+c \le 1$. Можно записать

$$1 \ge a+b+c \ge (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac) \ge 3(ab+bc+ac).$$

3.4. Можно ли число 2009^{2009} представить в виде суммы трех квадратов натуральных чисел?

ОТВЕТ. Можно.

РЕШЕНИЕ. Легко проверить, что $2009 = 41 \cdot 49$. Запишем равенство $1^2 + 2^2 + 6^2 = 41$. Отсюда $7^2 + 14^2 + 42^2 = 2009$. Умножая обе части последнего равенства на 2009^{2008}, получим

$$7^2(2009^{1004})^2 + 14^2(2009^{1004})^2 + 42^2(2009^{1004})^2 = 2009^{2009}.$$

Имеем:

$$2009^{2009} = (7 \cdot 2009^{1004})^2 + (14 \cdot 2009^{1004})^2 + (42 \cdot 2009^{1004})^2.$$