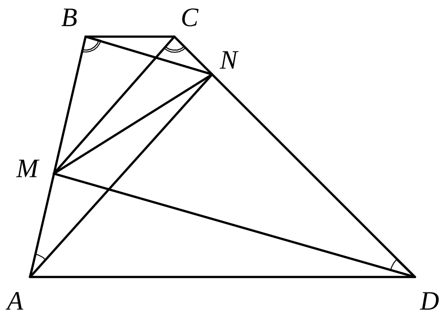
VIII КИЇВСЬКИЙ МІЖНАРОДНИЙ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФЕСТИВАЛЬ
Усна математична олімпіада. 10 клас. Розв'язання

1. У трапеції $ABCD$ $(AD \| BC)$ на сторонах AB та CD взято точки M та N відповідно, такі, що $\angle BAN = \angle CDM$. Доведіть, що $\angle BNA = \angle CMD$.



<u>ДОВЕДЕННЯ</u>. Очевидно, що чотирикутник $AMND$ є вписаним. Тому $\angle ADN + \angle AMN = 180°$. Звідси

$$\angle BMN + \angle BCN = (180° - \angle AMN) + (180° - \angle ADN) = 180°,$$

тобто чотирикутник $BCNM$ також є вписаним. Отже, $\angle ABN = \angle MCD$ і $\angle BNA = 180° - \angle ABN - \angle BAN = 180° - \angle MCD - \angle CDM = \angle CMD$.

2. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких виконуються умови:
(1) $f(2x) = f(x+y)f(y-x) + f(x-y)f(-x-y)$ для всіх дійсних x та y;
(2) $f(x) \ge 0$ для всіх дійсних x.

<u>ВІДПОВІДЬ</u>. $f(x) \equiv 0$ або $f(x) \equiv \dfrac{1}{2}$.

<u>РОЗВ'ЯЗАННЯ</u>. Оскільки $f(-2x) = f(2\cdot(-x)) = f(-x+y)f(y+x) + f(-x-y)f(x-y) = f(2x)$ для довільних дійсних x та y, то маємо, що

$$f(a) = f(-a) \text{ для будь-якого } a \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Підставивши в умову (1) $x = 0$, отримуємо: $f(0) = f^2(y) + f^2(-y)$. Враховуючи (*), маємо: $f(0) = 2f^2(y)$. З невід'ємності $f(y)$ випливає, що $f(y) = \text{const} = c$. З умови (1) $c = 2c^2$, звідки $c = 0$ або $c = \dfrac{1}{2}$.

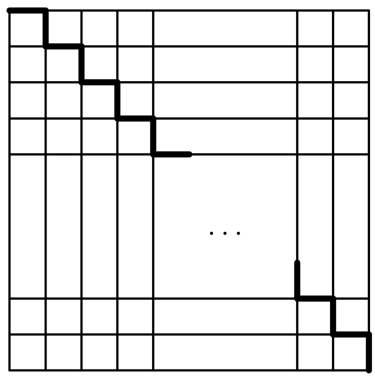
3. Знайдіть всі прості числа p, для яких $5^p + 4p^4$ є квадратом натурального числа.

<u>ВІДПОВІДЬ</u>. $p = 5$.

<u>РОЗВ'ЯЗАННЯ</u>. Нехай $5^p + 4p^4 = a^2$, де $a \in \mathbb{N}$. Тоді $5^p = (a - 2p^2)(a + 2p^2)$, звідки $a - 2p^2 = 5^l$, $a + 2p^2 = 5^{p-l}$, де $l \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$. Віднявши дві останні рівності, отримаємо, що $4p^2 = 5^{p-l} - 5^l$.
Якщо $l > 0$, то $4p^2 \,\vdots\, 5$, звідки $p = 5$, яке очевидно задовольняє умові задачі.
Якщо ж $l = 0$, то $a = 2p^2 + 1$, отже $5^p = 4p^2 + 1$. За індукцією легко довести, що для будь-якого натурального $p \ge 2$ виконується нерівність $5^p > 4p^2 + 1$.

4. Розглянемо шахову дошку 2009×2009. Нехай n — найменша кількість прямокутників, які можна намалювати на цій дошці так, щоб кожна сторона будь-якої клітинки на дошці містилась на стороні хоча б одного з цих прямокутників. Знайдіть n.

<u>ВІДПОВІДЬ</u>. $n = 2009$.



<u>РОЗВ'ЯЗАННЯ</u>. Розглянемо сторони клітинок, що утворюють ламану, показану на рисунку. Очевидно, що кожен прямокутник може містити на своїх сторонах не більше двох з виділених відрізків. Оскільки ця ламана має по 2009 вертикальних і горизонтальних ланок, то $n \ge 2009$.
Залишилось побудувати приклад розташування прямокутників для $n = 2009$. Розглянемо прямокутники, які мають ширину в 1 клітинку та довжину в 2009 клітинок, що накривають повністю рядки та стовпці з парними номерами. Їх разом буде 2008. Останній прямокутник — той, що накриває всю дошку.

5. Многочлен $f(x)=x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+3$ з дійсними коефіцієнтами має 6 дійсних від'ємних коренів (можливо, кратних). Доведіть, що $f(2)\geq 27^2$.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6$ — корені многочлена $f(x)$; тоді

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6=3. \qquad (*)$$

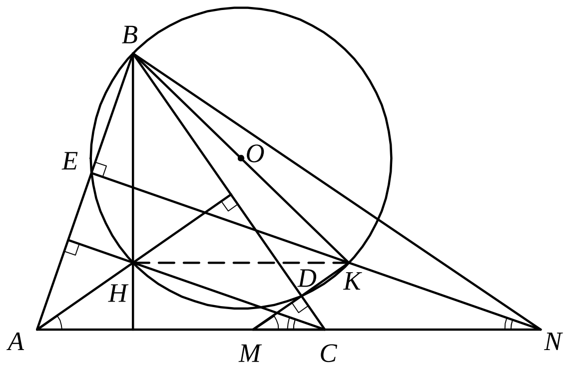
Зрозуміло, що $f(2)=(2-x_1)(2-x_2)\ldots(2-x_6)$. Виберемо серед коренів $f(x)$ два кореня (без обмеження загальності вважатимемо, що це x_1 та x_2) такі, що $x_1\geq-\sqrt[6]{3}$, а $x_2\leq-\sqrt[6]{3}$. Інші корені зафіксуємо, а x_1 та x_2 змінюватимемо так, щоб їхній добуток був постійним.

Неважко впевнитись, що значення виразу $(2-x_1)(2-x_2)=4+x_1x_2+2(-x_1-x_2)$ зменшиться, якщо замість x_1 та x_2 розглянути $-\sqrt[6]{3}$ та $-\frac{x_1x_2}{\sqrt[6]{3}}$. Діючи далі аналогічно, отримаємо, що найменше значення $f(2)$ за умови (*) досягається при $x_1=x_2=\ldots=x_6=-\sqrt[6]{3}$. Отже,

$$f(2)\geq(2+\sqrt[6]{3})^6>3^6=27^2.$$

6. У гострокутному трикутнику ABC M — внутрішня точка відрізка AC, а N — точка на продовженні сторони AC, причому $MN=AC$. Нехай D та E — основи перпендикулярів, опущених з точок M та N на прямі BC та AB відповідно. Доведіть, що ортоцентр трикутника ABC лежить на колі, описаному навколо трикутника BED.

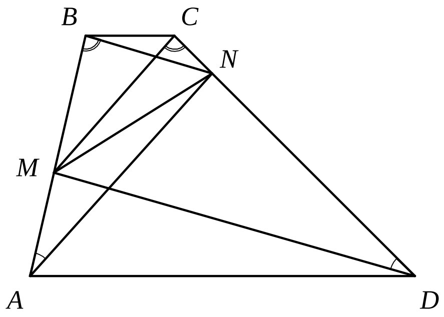
ДОВЕДЕННЯ. Нехай $MD\cap NE=K$. Зрозуміло, що BK — діаметр кола, описаного навколо $\triangle BED$. Оскільки $AH\parallel MK$ і $CH\parallel NK$, то $\angle HAC=\angle KMN$ і $\angle ACH=\angle MNK$. Враховуючи, що $AC=MN$, отримуємо, що $\triangle AHC=\triangle MKN$. Отже, відстань від H до AC дорівнює відстані від K до AC. Оскільки H і K лежать по один бік від AC, то $HK\parallel AC$. Звідси $\angle KHB=90°$, і точка H лежить на колі з діаметром BK, яке є описаним навколо $\triangle BED$.



8 травня 2009 року

VIII КИЕВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ
Устная математическая олимпиада. 10 класс. Решения

1. В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ на сторонах AB и CD взяты точки M и N соответственно, такие, что $\angle BAN = \angle CDM$. Докажите, что $\angle BNA = \angle CMD$.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что четырехугольник $AMND$ является вписанным. Поэтому $\angle ADN + \angle AMN = 180°$. Отсюда

$$\angle BMN + \angle BCN = (180° - \angle AMN) + (180° - \angle ADN) = 180°,$$

то есть четырехугольник $BCNM$ также является вписанным. Следовательно, $\angle ABN = \angle MCD$ и

$$\angle BNA = 180° - \angle ABN - \angle BAN = 180° - \angle MCD - \angle CDM = \angle CMD.$$

2. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых выполняются условия:

(1) $f(2x) = f(x+y)f(y-x) + f(x-y)f(-x-y)$ для всех действительных x и y;

(2) $f(x) \ge 0$ для всех действительных x.

ОТВЕТ. $f(x) \equiv 0$ или $f(x) \equiv \dfrac{1}{2}$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку $f(-2x) = f(2\cdot(-x)) = f(-x+y)f(y+x) + f(-x-y)f(x-y) = f(2x)$ для произвольных действительных x и y, то имеем, что

$$f(a) = f(-a) \text{ для любого } a \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Подставив в условие (1) $x = 0$, получим: $f(0) = f^2(y) + f^2(-y)$. Учитывая (*), имеем: $f(0) = 2f^2(y)$. Из неотрицательности $f(y)$ следует, что $f(y) = \text{const} = c$. Из условия (1) $c = 2c^2$, откуда $c = 0$ или $c = \dfrac{1}{2}$.

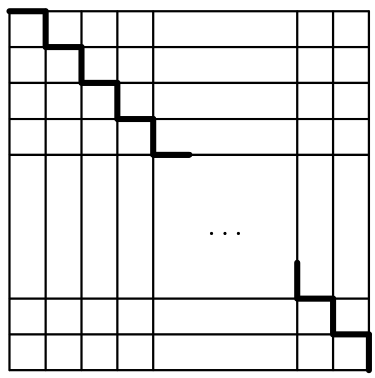
3. Найдите все простые числа p, для которых $5^p + 4p^4$ является квадратом натурального числа.

ОТВЕТ. $p = 5$.

РЕШЕНИЕ. Пусть $5^p + 4p^4 = a^2$, где $a \in \mathbb{N}$. Тогда $5^p = (a-2p^2)(a+2p^2)$, откуда $a - 2p^2 = 5^l$, $a + 2p^2 = 5^{p-l}$, где $l \in \{0, 1, 2, \ldots, p\}$. Отняв два последних равенства, получим, что $4p^2 = 5^{p-l} - 5^l$.
Если $l > 0$, то $4p^2 \,\vdots\, 5$, откуда $p = 5$, которое очевидно удовлетворяет условию задачи.
Если же $l = 0$, то $a = 2p^2 + 1$, следовательно $5^p = 4p^2 + 1$. По индукции легко доказать, что для любого натурального $p \ge 2$ выполняется неравенство $5^p > 4p^2 + 1$.

4. Рассмотрим шахматную доску 2009×2009. Пусть n — наименьшее количество прямоугольников, которые можно нарисовать на этой доске так, чтобы каждая сторона любой клеточки на доске находилась на стороне хотя бы одного из этих прямоугольников. Найдите n.

ОТВЕТ. $n = 2009$.



РЕШЕНИЕ. Рассмотрим стороны клеточек, образующих ломаную, показанную на рисунке. Очевидно, что каждый прямоугольник может содержать на своих сторонах не более двух из выделенных отрезков. Поскольку эта ломаная имеет по 2009 вертикальных и горизонтальных звеньев, то $n \ge 2009$.
Осталось построить пример расположения прямоугольников для $n = 2009$. Рассмотрим прямоугольники, имеющие ширину в 1 клеточку и длину в 2009 клеточек, покрывающие полностью строки и столбцы с четными номерами. Их вместе будет 2008. Последний прямоугольник покрывает всю доску.

5. Многочлен $f(x)=x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+3$ с действительными коэффициентами имеет 6 действительных отрицательных корней (возможно, кратных). Докажите, что $f(2)\ge 27^2$.

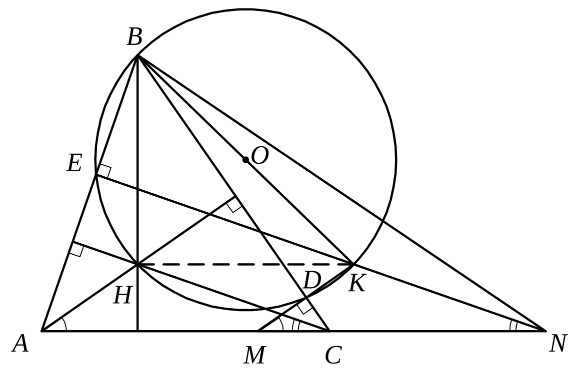
<u>**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**</u> Пусть $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6$ — корни многочлена $f(x)$; тогда

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6=3. \qquad (*)$$

Понятно, что $f(2)=(2-x_1)(2-x_2)\ldots(2-x_6)$. Выберем среди корней $f(x)$ два корня (без ограничения общности будем считать, что это x_1 и x_2) такие, что $x_1\ge-\sqrt[6]{3}$, а $x_2\le-\sqrt[6]{3}$. Другие корни зафиксируем, а x_1 и x_2 будем изменять так, чтобы их произведение было постоянным.
Нетрудно убедиться, что значение выражения $(2-x_1)(2-x_2)=4+x_1x_2+2(-x_1-x_2)$ уменьшится, если вместо x_1 и x_2 рассмотреть $-\sqrt[6]{3}$ и $-\dfrac{x_1x_2}{\sqrt[6]{3}}$. Действуя далее аналогично, получим, что наименьшее значение $f(2)$ при условии (*) достигается при $x_1=x_2=\ldots=x_6=-\sqrt[6]{3}$. Следовательно,

$$f(2)\ge(2+\sqrt[6]{3})^6>3^6=27^2.$$

6. В остроугольном треугольнике ABC M — внутренняя точка отрезка AC, а N — точка на продолжении стороны AC, причем $MN=AC$. Пусть D и E — основания перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые BC и AB соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на окружности, описанной около треугольника BED.



<u>**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**</u> Пусть $MD\cap NE=K$. Понятно, что BK — диаметр окружности, описанной около $\triangle BED$. Поскольку $AH\parallel MK$ и $CH\parallel NK$, то $\angle HAC=\angle KMN$ и $\angle ACH=\angle MNK$. Учитывая, что $AC=MN$, получаем, что $\triangle AHC=\triangle MKN$. Следовательно, расстояние от H до AC равно расстоянию от K до AC. Поскольку H и K лежат по одну сторону от AC, то $HK\parallel AC$. Отсюда $\angle KHB=90°$, и точка H лежит на окружности с диаметром BK, описанной около $\triangle BED$.

8 мая 2009 года