

Математический экспресс

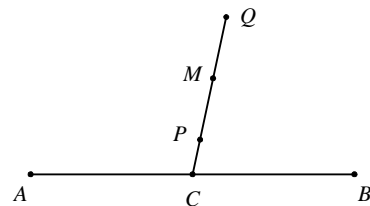
I тур (25 минут)

1.1. (7 баллов) Докажите, что число $2^{98} + 1$ кратно числу $2^{49} + 2^{25} + 1$.

1.2. (7 баллов) Числа p_1, p_2, q_1, q_2 таковы, что $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Докажите, что по крайней мере одно из уравнений $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$, $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ имеет решение.

1.3. (7 баллов) Точка C — середина отрезка AB . На луче CQ (рис.) отметили точки P и M так, что $PM = MQ$. Докажите, что

$$AP + BQ > 2CM.$$



1.4. (7 баллов) Можно ли подобрать компанию из 16 человек, в которой у каждого человека было бы ровно 6 друзей, а у любых двух человек — ровно 2 общих друга?

Пользоваться микрокалькуляторами запрещается!

II тур (25 минут)

2.1. (7 баллов) Действительные числа a, b, c, d таковы, что для любого натурального n выполняется равенство $a^n + b^n = c^n + d^n$. Верно ли, что выполняется одно из условий: $a = c, b = d$ или $a = d, b = c$?

2.2. (7 баллов) В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) прямая BC является касательной к описанной окружности треугольника ABD . Докажите, что прямая AD — касательная к описанной окружности треугольника BCD .

2.3. (7 баллов) Натуральные числа a, b, c таковы, что число $a + b + c$ — простое, а число $a^2 + b^2 + c^2$ делится нацело на число $ab + bc + ac$. Найдите числа a, b и c .

2.4. (7 баллов) Существует ли выпуклый семиугольник, у которого каждая из диагоналей перпендикулярна какой-либо другой диагонали?

Пользоваться микрокалькуляторами запрещается!

III тур (25 минут)

3.1. (7 баллов) Найдите сумму цифр всех трехзначных чисел.

3.2. (7 баллов) Десятичная запись каждого из чисел 2^n и 5^n ($n \in \mathbb{N}$) начинается с одной и той же цифры. Найдите эту цифру.

3.3. (7 баллов) Положительные числа a, b и c таковы, что $abc = a^4 + b^4 + c^4$. Докажите, что

$$ab + bc + ac \leq \frac{1}{3}.$$

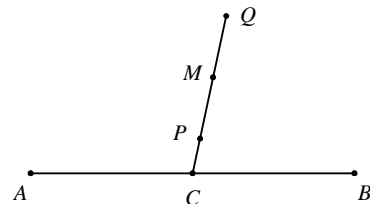
3.4. (7 баллов) Можно ли число 2009^{2009} представить в виде суммы трех квадратов натуральных чисел?

Пользоваться микрокалькуляторами запрещается!

Математичний експрес

I тур (25 хвилин)

- 1.1. (7 балів) Доведіть, що число $2^{98} + 1$ кратне числу $2^{49} + 2^{25} + 1$.
- 1.2. (7 балів) Числа p_1, p_2, q_1, q_2 такі, що $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Доведіть, що принаймні одне з рівнянь $x^2 + p_1 x + q_1 = 0, x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ має розв'язок.
- 1.3. (7 балів) Точка C — середина відрізка AB . На промені CQ (рис.) відмітили точки P і M так, що $PM = MQ$. Доведіть, що
- $$AP + BQ > 2CM.$$
- 1.4. (7 балів) Чи можна підібрати компанію з 16 людей, в якій у кожної людини було б рівно 6 друзів, а у будь-яких двох людей — рівно 2 спільних друга?



Користуватися мікрокалькуляторами забороняється!

II тур (25 хвилин)

- 2.1. (7 балів) Дійсні числа a, b, c, d такі, що для будь-якого натурального n виконується рівність $a^n + b^n = c^n + d^n$. Чи справедливо, що виконується одна з умов: $a = c, b = d$ або $a = d, b = c$?
- 2.2. (7 балів) У трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) пряма BC є дотичною до описаного кола трикутника ABD . Доведіть, що пряма AD — дотична до описаного кола трикутника BCD .
- 2.3. (7 балів) Натуральні числа a, b, c такі, що число $a + b + c$ — просте, а число $a^2 + b^2 + c^2$ ділиться націло на число $ab + bc + ac$. Знайдіть числа a, b та c .
- 2.4. (7 балів) Чи існує опуклий семикутник, у якого кожна з діагоналей перпендикулярна будь-якій іншій діагоналі?

Користуватися мікрокалькуляторами забороняється!

III тур (25 хвилин)

- 3.1. (7 балів) Знайдіть суму цифр всіх трицифрових чисел.
- 3.2. (7 балів) Десятковий запис кожного з чисел 2^n і 5^n ($n \in \mathbb{N}$) починається з тієї ж самої цифри. Знайдіть цю цифру.
- 3.3. (7 балів) Додатні числа a, b та c такі, що $abc = a^4 + b^4 + c^4$. Доведіть, що
- $$ab + bc + ac \leq \frac{1}{3}.$$
- 3.4. (7 балів) Чи можна число 2009^{2009} подати у вигляді суми трьох квадратів натуральних чисел?

Користуватися мікрокалькуляторами забороняється!