

XVII Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»

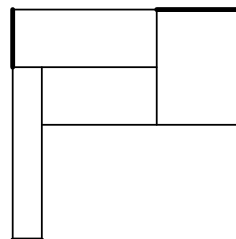
5 клас

1. Розставте по колу чотири одиниці, три двійки та три трійки так, щоб сума будь-яких трьох чисел, що йдуть поспіль, не ділилася на 3.

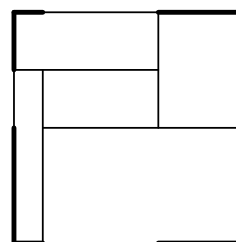
Розв'язання. Один з можливих розв'язків показано на рисунку.

```

      1  1  2
     3      1
    1        2
     3  3  2
  
```



2. Квадрат зі стороною 4 м розрізаний на прямокутники так, як показано на рисунку. Сума довжин виділених відрізків дорівнює 2 м. Знайдіть периметр внутрішнього прямокутника. Відповідь поясніть.



Розв'язання. Кожен виділений відрізок намалюємо ще раз на протилежній стороні квадрата. Тоді виділені відрізки будуть мати загальну довжину 4 м. Невиділена частина периметра квадрата має довжину 12 м і складається з двох вертикальних та двох горизонтальних відрізків, які за довжиною якраз дорівнюють сторонам внутрішнього прямокутника. Таким чином, периметр внутрішнього прямокутника дорівнює 12 м.

3. Сім'я складається з трьох людей: батька, матері та сина. На даний момент разом їх вік складає 74 роки, а 10 років тому ця сума складала 47 років. Скільки років зараз батькові, якщо він старший за сина на 28 років?

Розв'язання. За минулі 10 років загальний вік сім'ї збільшився на $74 - 47 = 27$ років. Очевидно, що вік батька і мами збільшився на 10 років кожен. Тому вік сина збільшився всього на 7 років. Це означає, що син народився лише 7 років тому. Отже, зараз його вік складає 7 років, а вік батька складає $7 + 28 = 35$ років.

4. Три шашки стоять у клітинках таблиці 8×8 так, як показано на рисунку 1. За один хід дозволяється пересунути будь-яку шашку на 2 клітинки в одному з чотирьох напрямків: вгору, вниз, вправо або вліво. Чи може статися так, що через декілька ходів шашки будуть стояти у положенні, показаному на рисунку 2?

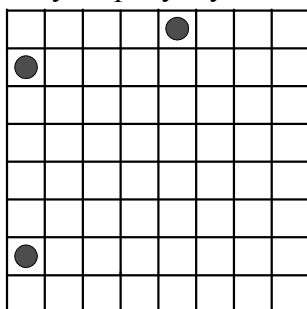


Рис. 1

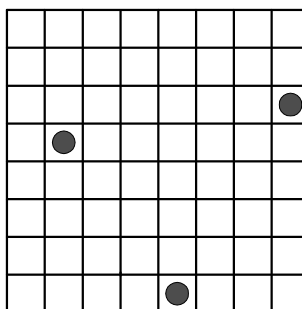


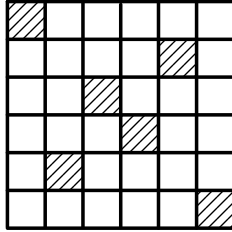
Рис. 2

Розв'язання. Розфарбуємо клітинки таблиці у шаховому порядку. Зрозуміло, що при кожному ході колір клітинки, на якій стоїть шашка, не змінюється. Оскільки на рис. 1 шашки займають 2 чорні та 1 білу клітинку, а на рис. 2 — 2 білі та 1 чорну, то відповідь на питання задачі є негативною.

6 клас

1. Зафарбуйте шість клітинок таблиці розміром 6×6 клітинок у чорний колір так, щоб з неї не можна було вирізати ні білої смужки розміром 1×6 , ні білого квадрата розміром 3×3 . Розрізи можна робити тільки по лініях сітки.

Розв'язання. Один з можливих розв'язків показано на рисунку.



2. Чи існують такі два числа, що їх сума дорівнює їх добутку і дорівнює частці від ділення одного з них на інше?

Існують. Це числа $\frac{1}{2}$ і -1 . *Розв'язання.* Справді, $\frac{1}{2} + (-1) = \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2} : (-1) = -\frac{1}{2}$.

3. Ірина записала на дошці три цілих числа. Аліна піднесла одне з цих чисел у квадрат, друге в куб, а третє в четвертий степінь. Чи може сума чисел, отриманих Аліною, бути на 2009 більше за суму чисел, записаних Іриною?

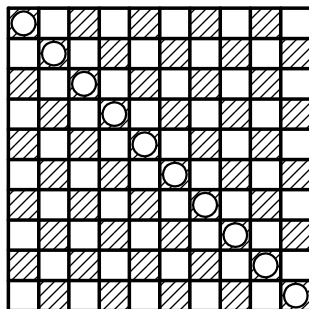
Не може. *Розв'язання.* Нехай Ірина записала числа a , b і c . Тоді Аліна отримала числа a^2 , b^3 , c^4 . Розглянемо різницю

$$(a^2 + b^3 + c^4) - (a + b + c) = (a^2 - a) + (b^3 - b) + (c^4 - c).$$

Слід зауважити, що значення кожного з виразів $(a^2 - a)$, $(b^3 - b)$, $(c^4 - c)$ — парне число.

4. На великій діагоналі дошки розміром 10×10 клітинок стоять 10 шашок (усі в різних клітинках). За один хід дозволяється вибрати будь-яку пару шашок і пересунути кожну з них на одну клітинку вниз або на одну клітинку вгору. Чи можна за кілька ходів поставити всі шашки на нижню горизонталь дошки?

Не можна. *Розв'язання.* Зафарбуємо клітинки дошки так, як показано на рисунку.



Тепер слід зауважити, що після кожного ходу парність кількості шашок, які стоять на чорних полях, не змінюється. У початковій позиції ця кількість дорівнює 10. Якщо припустити, що шашки можна поставити на нижню горизонталь, то в кінцевій позиції ця кількість має дорівнювати 10, а дорівнює 5. Отримали суперечність.

7 клас

1. Автомобіль має проїхати 180 км. Дві третини цієї відстані він їхав з середньою швидкістю 60 км/год. Після цього водій вирішив збільшити швидкість і проїхати залишок шляху так, щоб середня швидкість на всьому шляху складала 90 км/год. Чи зможе водій реалізувати свій план?

Не може. *Розв'язання.* При середній швидкості 90 км/год шлях завдовжки 180 км зайняв би 2 год. Проте на подолання перших 120 км (що складає дві третини шляху) уже витрачено 2 год.

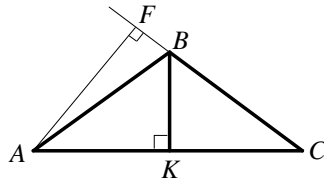
2. Під час додавання двох натуральних чисел неуважний Петрик помилково дописав нуль справа в запису одного з доданків. У результаті замість числа 2009 він отримав число 9002. Які числа додавав Петрик?

777 і 1232. *Розв'язання.* Приписуючи справа до натурального числа цифру 0, тим самим ми множимо число на 10. Тепер зрозуміло, що досить розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y = 2009, \\ 10x + y = 9002. \end{cases}$$

3. Див. 6 клас, задача 3.

4. Чи існує рівнобедрений трикутник, у якого кожна висота вдвічі менша від однієї з сторін? Відповідь обґрунтуйте.

Так, існує. *Розв'язання.* Розглянемо рівнобедрений трикутник ABC , у якому $AB = BC$, $\angle BAC = \angle BCA = 30^\circ$. Нехай BK і AF — висоти трикутника (див. рис). Тоді $BK = \frac{1}{2}BC$, $AF = \frac{1}{2}AC$.



5. Яку найменшу кількість клітинок квадрата розміром 7×7 клітинок треба зафарбувати, щоб у будь-якому квадраті розміром 4×4 клітинки, який є його частиною, було зафарбовано рівно 5 клітинок?

Розв'язання. Кількість зафарбованих клітинок має бути не менше ніж 9. Це впливає з того, що квадрати 4×4 , виділені на рисунку 1, мають одну спільну клітинку, а отже, кожний з них має містити ще чотири зафарбованих клітинки.

На рисунку 2 показано, як можна зафарбувати 9 клітинок так, щоб умова задачі виконувалась.

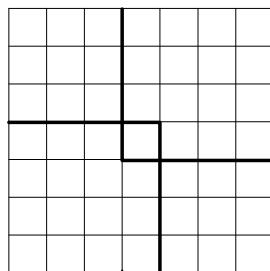


Рис. 1

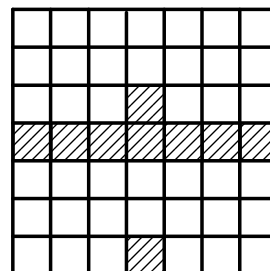


Рис. 2