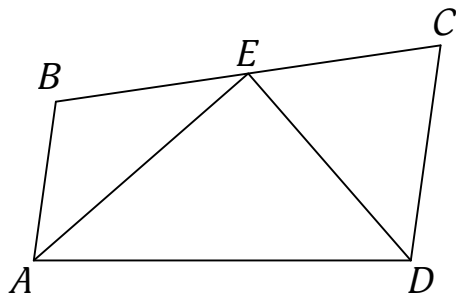




XXIII Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»

7 клас

1. Знайдіть які-небудь шість попарно різних чисел a, b, c, d, e, f для яких значення виразів $a^2 + 2cd + b^2$, $c^2 + 2ef + d^2$, $e^2 + 2ab + f^2$ є квадратами натуральних чисел.
2. Про числа a і b відомо, що $a - b = 171$. Чи може виявитися, що $a^{100} = b^{100}$?
3. На рисунку $AD = AB + CD$. Точка E — середина відрізка BC . Відомо, що промінь AE — бісектриса кута BAD . Доведіть, що промінь DE — бісектриса кута CDA .
4. Двоє грають на дошці 20×15 клітин. Кожен по черзі відмічає квадрат по лініях сітки (будь-якого можливого розміру) і зафарбовує його. Виграє той, хто зафарбує останню клітку. Двічі зафарбовувати клітини неможна. Хто виграє при правильній грі і як треба грати?
5. Набір, що складається з n ($n \geq 3$) натуральних чисел називають *гарним*, якщо жодне з чисел набору не ділиться без остачі на інше, а добуток будь-яких двох чисел набору ділиться без остачі на будь-яке із чисел, що залишилися. Наприклад, набір, що складається з 3-х чисел 60, 90, 150, — гарний. Чи існує гарний набір, що складається з: 1) 4 чисел; 2) 2015 чисел?



Користуватися мікрокалькуляторами заборонено

Час виконання роботи — 3 години 30 хвилин

Київ, ліцей «Лідер»
28 лютого 2015 року

Результати олімпіади будуть розміщені на сайті <http://www.leader171.kiev.ua/> не пізніше 6 березня



1. Знайдіть які-небудь шість попарно різних чисел a, b, c, d, e, f для яких значення виразів $a^2 + 2cd + b^2$, $c^2 + 2ef + d^2$, $e^2 + 2ab + f^2$ є квадратами натуральних чисел.

Відповідь: наприклад, $a=1, b=12, c=2, d=6, e=3, f=4$.

Розв'язання. Достатньо знайти такі числа, що $ab=cd=ef$. Оскільки $1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, то підходящими є, наприклад, числа $a=1, b=12, c=2, d=6, e=3, f=4$.

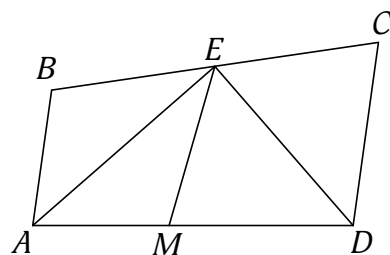
2. Про числа a і b відомо, що $a-b=171$. Чи може виявитися, що $a^{100} = b^{100}$?

Відповідь: може.

Розв'язання. З рівності $a^{100} = b^{100}$ випливає, що $a=b$ або $a=-b$. Зрозуміло, що числа a і b такі, що $a=b$ умову не задовольняють. При $a=-b$ отримаємо $2a=171$, $a=85,5, b=-85,5$.

3. На рисунку $AD = AB + CD$. Точка E — середина відрізка BC . Відомо, що промінь AE — бісектриса кута BAD . Доведіть, що промінь DE — бісектриса кута CDA .

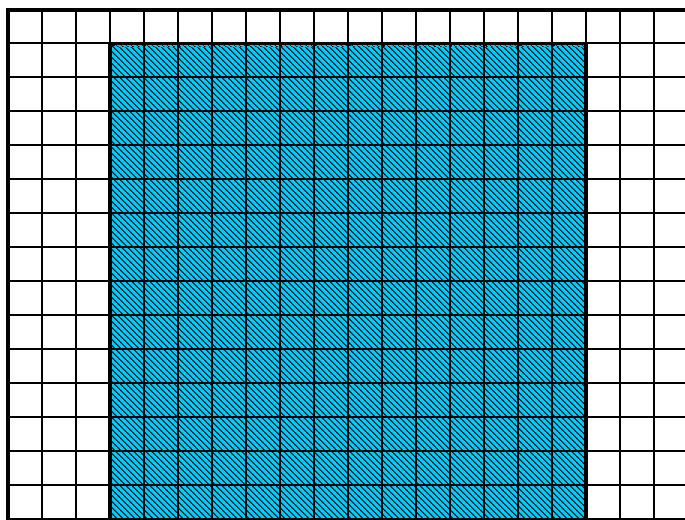
Доведення. На відрізку AD відмітимо точку M так, що $AM = AB$. Тоді $MD = DC$. Доведемо, що $\triangle ABE = \triangle AME$. Дійсно, $AB = AM$, $\angle BAE = \angle MAE$, AE — спільна сторона цих трикутників. Тоді $BE = ME$. Отже $ME = CE$. Таким чином, $\triangle DME = \triangle DCE$ за 3-ю ознакою рівності трикутників. Звідси випливає, що $\angle MDE = \angle CDE$.



4. Двоє грають на дошці 20×15 клітин. Кожен по черзі відмічає квадрат по лініях сітки (будь-якого можливого розміру) і зафарбовує його. Виграє той, хто зафарбує останню клітку. Двічі зафарбовувати клітини неможна. Хто виграє при правильній грі і як треба грати?

Відповідь: перший.

Розв'язання. Перший зафарбовує квадрат 14×14 , що прилягає до більшої сторони прямокутника, так, щоб вісь симетрії квадрата і вісь симетрії прямокутника збігалися (див. рисунок). Тоді відносно цієї загальної осі залишок прямокутника розпадається на дві однакові частини. Тепер на кожен хід другого гравця перший відповідає симетричним ходом, причому у першого хід завжди знайдеться, оскільки другий не може зафарбувати квадрат, що перетинає вісь симетрії.



5. Набір, що складається з n ($n \geq 3$) натуральних чисел, називають *гарним*, якщо жодне з чисел набору не ділиться без остачі на інше, а добуток будь-яких двох чисел набору ділиться без остачі на будь-яке із чисел, що залишилися. Наприклад, набір, що складається з 3-х чисел 60, 90, 150, — гарний. Чи існує гарний набір, що складається з: 1) 4 чисел; 2) 2015 чисел?

Відповідь: 1) існує; 2) існує.

Розв'язання. Наведемо розв'язання для $n=2015$. Нехай $p_1, p_2, \dots, p_{2015}$ — різні прості числа. Тоді легко переконатися, що числа $a_1 = p_1^2 p_2 \dots p_{2015}$, $a_2 = p_1 p_2^2 \dots p_{2015}$, $\dots$, $a_{2015} = p_1 p_2 \dots p_{2015}^2$ задовольняють умову.

Зауваження: гарний набір 60, 90, 150 побудований з аналогічних міркувань: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$.