



XXIII Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»

6 клас

1. Чи можна розставити на футбольному полі чотирьох футболістів так, щоб попарні відстані між ними дорівнювали 1, 2, 3, 4, 5 і 6 метрів?
2. У родині 4 особи. Якщо Марійці удвічі збільшать стипендію, загальний дохід всієї родини зросте на 5 %, якщо замість цього мамі удвічі збільшать зарплату — на 15 %, якщо ж зарплату удвічі збільшать татові — на 25 %. На скільки відсотків зросте дохід всієї родини, якщо дідусеві удвічі збільшать пенсію?
3. Число $\frac{41}{333}$ записали у вигляді десяткового періодичного дробу. Потім 2015-у цифру після коми викреслили. Порівняйте отримане число з числом $\frac{41}{333}$.
4. Для гри у «Морський бій» на полі 8×8 клітин розставили 12 «двопалубних» кораблів. Чи обов'язково залишиться місце для «трипалубного» корабля? («Двопалубний» корабель — прямокутник 1×2 , а «трипалубний» — 1×3 . Кораблі можуть стикатися, але накладатися один на одного не повинні.)
5. Над рядком із чотирьох чисел 2, 0, 1, 5 виконаємо наступну операцію: між кожними двома сусідніми числами впишемо число, яке вийде в результаті віднімання лівого числа від правого. В результаті отримаємо рядок 2, -2, 0, 1, 1, 4, 5. Над новим рядком виконаємо ту саму операцію і т. д. Знайдіть суму чисел рядка, який вийде після ста таких операцій.

Користуватися мікрокалькуляторами заборонено

Час виконання роботи — 3 години

Київ, ліцей «Лідер»
28 лютого 2015 року

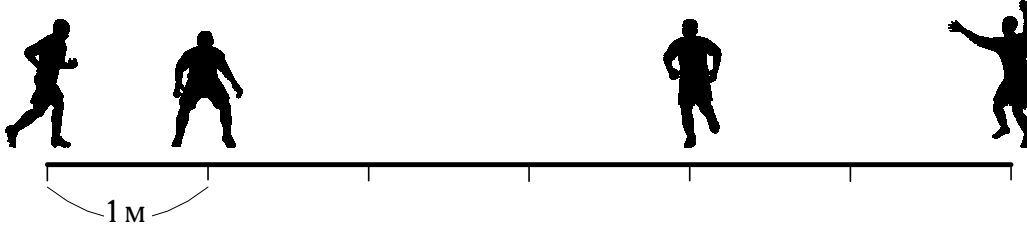
Результати олімпіади будуть розміщені на сайті <http://www.leader171.kiev.ua/> не пізніше 6 березня



XXIII Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»
6 клас. Відповіді та вказівки

1. Чи можна розставити на футбольному полі чотирьох футболістів так, щоб попарні відстані між ними дорівнювали 1, 2, 3, 4, 5 і 6 метрів?

Відповідь: футболістів можна розставити на одній прямій (див. рис.).



2. У родині 4 особи. Якщо Марійці удвічі збільшать стипендію, загальний дохід всієї родини зросте на 5%, якщо замість цього мамі удвічі збільшать зарплату — на 15%, якщо ж зарплату удвічі збільшать татові — на 25%. На скільки відсотків зросте дохід всієї родини, якщо дідусеві удвічі збільшать пенсію?

Відповідь: на 55%.

Розв'язання. Якщо Марійці удвічі збільшать стипендію, сімейний дохід зросте на розмір цієї стипендії. Отже, Марійчина стипендія становить 5% від загального доходу. Аналогічно, мамина зарплата становить 15%, а батькова — 25%. Решта 55% припадають на дідову пенсію. Отже, якщо йому удвічі збільшать пенсію, дохід всієї родини зросте на 55%.

3. Число $\frac{41}{333}$ записали у вигляді десяткового періодичного дробу. Потім 2015-у цифру після коми

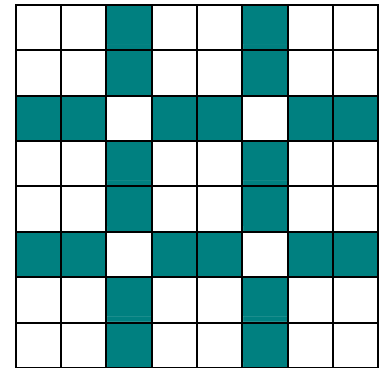
викреслили. Порівняйте отримане число з числом $\frac{41}{333}$.

Відповідь: отримане число більше.

Розв'язання. Маємо: $\frac{41}{333} = 0,123$. Тепер зрозуміло, що 2015-та і 2016-та цифри відповідно дорівнюють 2 і 3. Тоді перші 2014 цифр початкового і отриманого чисел збігаються, а 2015-ті цифри відповідно дорівнюють 2 і 3.

4. Для гри у «Морський бій» на полі 8×8 клітин розставили 12 «двопалубних» кораблів. Чи обов'язково залишиться місце для «трипалубного» корабля? («Двопалубний» корабель — прямокутник 1×2 , а «трипалубний» — 1×3 . Кораблі можуть стикатися, але накладатися один на одного не повинні.)

Відповідь: не обов'язково. Приклад розстановки «двопалубних» кораблів, при якій не залишається місця для «трипалубного», див. на рисунку.



5. Над рядком із чотирьох чисел 2, 0, 1, 5 виконаємо наступну операцію: між кожними двома сусідніми числами впишемо число, яке вийде в результаті віднімання лівого числа від правого. В результаті отримаємо рядок 2, -2, 0, 1, 1, 4, 5. Над новим рядком виконаємо ту саму операцію і т. д. Знайдіть суму чисел рядка, який вийде після ста таких операцій.

Відповідь: 308.

Розв'язання. Подивимося, як змінюється сума чисел рядка після однієї операції. Нехай a_1, a_2, \dots, a_n — рядок, до якого застосовується операція. Тоді новий рядок має вигляд $a_1, a_2 - a_1, a_2, a_3 - a_2, \dots, a_{n-1}, a_n - a_{n-1}, a_n$. Сума чисел нового рядка дорівнює $a_1 + \dots + a_n + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = s + a_n - a_1$, де s — сума чисел початкового рядка. Зазначимо тепер, що для будь-якого рядка, отриманого з рядка 2, 0, 1, 5 описаною в умові задачі операцією, $a_n = 5$, $a_1 = 2$. Отже, після кожної такої операції сума чисел збільшується на три. Сума чисел початкового рядка дорівнює 8. Отже, сума чисел рядка, який вийде після ста таких операцій, дорівнює $8 + 3 \cdot 100 = 308$.