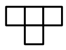
XXIV Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»

7 клас

1. Декілька школярів збирали гриби. Школяр, який зібрав найбільшу кількість грибів, набрав $\frac{1}{5}$ загальної кількості грибів, і школяр, який зібрав найменшу кількість грибів, зібрав $\frac{1}{7}$ загальної кількості. Скільки школярів збирали гриби?

2. Числа a та b такі, що $5(a-1)=a^2+b$. Яке з чисел більше: a чи b?

3. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) кут ABC більше від кута BAC. На стороні AC відклали точку K так, що $\angle KBC = \angle BAC$. Доведіть, що висота CH ділить відрізок BK навпіл.

4. Є дошка 100×100 клітин. Двоє гравців по черзі викладають на дошку свої фігури. Перший гравець викладає чотириклітинні фігури вигляду , а другий гравець — триклітинні фігури вигляду . Програє той гравець, який не може зробити хід. Хто з гравців виграє при правильній грі?

5. Знайдіть всі натуральні числа n і m, які задовольняють рівність $n^2+5n+3=m^2$.

Користуватися мікрокалькуляторами заборонено

Час виконання роботи — 3 години

Київ, ліцей «Лідер»
28 лютого 2016 року

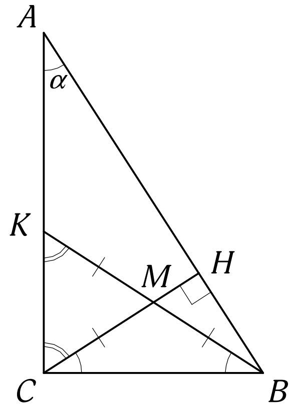
Результати олімпіади будуть розміщені на сайті http://www.leader171.kiev.ua/ не пізніше 6 березня

XXIV Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»
7 клас. Відповіді та вказівки

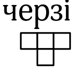
1. Декілька школярів збирали гриби. Школяр, який зібрав найбільшу кількість грибів, набрав $\frac{1}{5}$ загальної кількості грибів, і школяр, який зібрав найменшу кількість грибів, зібрав $\frac{1}{7}$ загальної кількості. Скільки школярів збирали гриби?
Відповідь: 6 школярів.
Вказівка. З умови випливає, що кількість школярів більша за 5 і менша від 7.

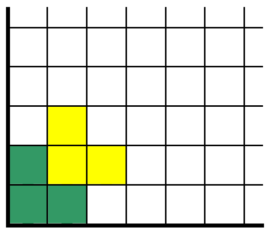
2. Числа a та b такі, що $5(a-1)=a^2+b$. Яке з чисел більше: a чи b?
Відповідь: $a>b$.
Розв'язання. Перепишемо задану рівність у вигляді $a-b=a^2-4a+5$. Отримаємо $a-b=(a-2)^2+1>0$, звідки випливає, що $a>b$.

3. У прямокутному трикутнику ABC $(\angle ACB=90°)$ кут ABC більше від кута BAC. На стороні AC відклали точку K так, що $\angle KBC=\angle BAC$. Доведіть, що висота CH ділить відрізок BK навпіл.



Доведення. Позначимо M точку перетину відрізків BK і CH (рис.). Нехай $\angle BAC=\alpha$. Тоді $\angle KBC=\alpha$ і $\angle BCH=\alpha$. Таким чином, у трикутнику BMC отримуємо $\angle BCM=\angle MBC$. Звідси $CM=MB$. У трикутнику CMK $\angle MKC=\angle MCK=90°-\alpha$. Тоді $CM=MK$. Таким чином, $MK=MB$.

4. Є дошка 100×100 клітин. Двоє гравців по черзі викладають на дошку свої фігури. Перший гравець викладає чотириклітинні фігури вигляду , а другий гравець — триклітинні фігури вигляду . Програє той гравець, який не може зробити хід. Хто з гравців виграє при правильній грі?
Відповідь: другий гравець.



Розв'язання. Другий гравець може притримуватися наступної стратегії. Своїм першим ходом він викладає свою фігуру в один із чотирьох кутів дошки як показано на рисунку («жовта» фігура). Зрозуміло, що перший гравець не зможе покласти свою фігуру так, щоб була накрита яка-небудь «зелена» клітина. Потім другий гравець може грати як завгодно, притримуючись лише одного — не накривати «зелені» клітини доти, доки є можливість зробити будь-який інший хід. Коли такі можливості скінчаться, другий гравець зможе накрити «зелену» фігуру. Зрозуміло, що після цього ходу перший гравець не зможе зробити свій хід.

5. Знайдіть всі натуральні числа n і m, які задовольняють рівність $n^2+5n+3=m^2$.
Відповідь: $n=1$, $m=3$.
Розв'язання. Порівняємо значення виразу n^2+5n+3 з квадратами двох послідовних натуральних чисел: $n+2$ та $n+3$. Легко показати, що $(n+2)^2\le n^2+5n+3<(n+3)^2$. Тоді зрозуміло, що значення виразу n^2+5n+3 є квадратом натурального числа тільки за умови $n^2+5n+3=(n+2)^2$. Звідси $n=1$. Тоді $m^2=9$, $m=3$.