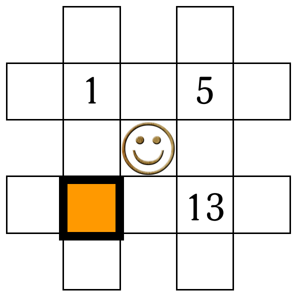
XXIV Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»

6 клас

1. Яку найбільшу кількість натуральних чисел, що не перевершують 1000, можна вибрати, щоб жодне із цих чисел не ділилося на різницю будь-яких двох інших?

2. У клітинки фігури, зображеної на рисунку, вписані всі натуральні числа від 1 до 16 так, що суми чисел в обох рядках і обох стовпчиках однакові. Положення чисел 1, 5 і 13 показані на рисунку. Яке число може стояти у виділеній клітинці?



3. На екрані комп'ютера зображено число, більше за 1 000 000. Кожну секунду від числа на екрані віднімається його перша цифра. Чи буде коли-небудь на екрані зображено число 80 000?

4. На трьох картках написані цифри, з яких складене трицифрове число. Потім картки переклали так, що кожна картка змінила своє місце. Вийшло нове трицифрове число, яке в сумі з попереднім дає 1000. Знайдіть обидва трицифрові числа.

5. По колу були записані 8 чисел. Потім між кожними сусідніми числами записали їх суму, а старі числа витерли. Чи могло виявитися так, що тепер по колу записані числа: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18?

Користуватися мікрокалькуляторами заборонено

Час виконання роботи — 2 години 30 хвилин

Київ, ліцей «Лідер»
28 лютого 2016 року

Результати олімпіади будуть розміщені на сайті http://www.leader171.kiev.ua/ не пізніше 6 березня

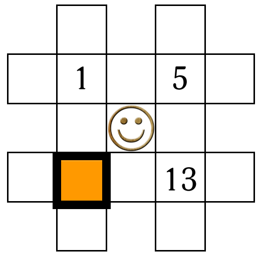
XXIV Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»
6 клас. Відповіді та вказівки

1. Яку найбільшу кількість натуральних чисел, що не перевершують 1000, можна вибрати, щоб жодне із цих чисел не ділилося на різницю будь-яких двох інших?

Відповідь: 500.

Розв'язання. Приклад, коли чисел 500: усі непарні числа, менші від 1000 — усі їх різниці парні, тому на жодну будь-яке непарне число ділитися не може. Якщо ж ми візьмемо хоча б 501 число, то серед них обов'язково знайдуться два, що відрізняються на 1.

2. У клітинки фігури, зображеної на рисунку, вписані всі натуральні числа від 1 до 16 так, що суми чисел в обох рядках і обох стовпчиках однакові. Положення чисел 1, 5 і 13 показані на рисунку. Яке число може стояти у виділеній клітинці?



Відповідь: 9.

Розв'язання. Якщо додати всі чотири суми чисел у рядках і стовпчиках, то, з одного боку, вийде $4S$, а з іншого — сума всіх натуральних чисел від 1 до 16 плюс сума всіх чисел, які стоять у клітинках на їх перетинах. Нехай у виділену клітинку вписане число x. Тоді вказана сума дорівнює $1+\ldots+16+1+5+13+x=155+x$. Таким чином, число x має давати при діленні на 4 остачу 1. Таких чисел на відрізку від 1 до 16 чотири, і три з них уже вписані на інших перетинах рядків і стовпчиків. Число 9, яке залишилось, і має бути вписане у виділену клітинку.

3. На екрані комп'ютера зображено число, більше за 1 000 000. Кожну секунду від числа на екрані віднімається його перша цифра. Чи буде коли-небудь на екрані зображено число 80 000?

Відповідь: ні.

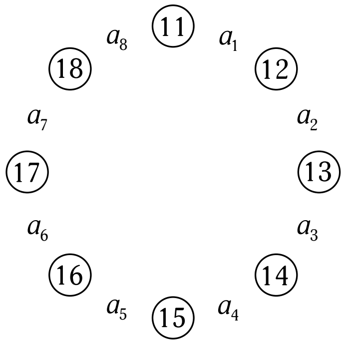
Розв'язання. Коли наше число стане менше від 200 000, від нього буде відніматись 1, поки не вийде 99 999. Потім буде відніматися дев'ятка, поки не вийде 89 991. А потім із цього непарного числа буде відніматися вісімка, поки воно не стане менше від 80 000. Зрозуміло, що таким чином парне число 80 000 отримати не можна.

4. На трьох картках написані цифри, з яких складене трицифрове число. Потім картки переклали так, що кожна картка змінила своє місце. Вийшло нове трицифрове число, яке в сумі з попереднім дає 1000. Знайдіть обидва трицифрових числа.

Відповідь: 545, 455.

Розв'язання. Нехай у вихідному числі a сотень, b десятків і c одиниць. Тоді після перестановки в одержаному числі або b сотень, c десятків і a одиниць, або c сотень, a десятків і b одиниць. При цьому другий випадок дасть, очевидно, ту ж пару чисел у зворотному порядку. У першому випадку $100(a+b)+10(b+c)+c+a=110b+101a+11c=1000 \quad \Leftrightarrow \quad 101a+1=1001-110b-11c$. В останньому рівнянні права частина ділиться на 11. Короткий перебір показує, що $101a+1$ ділиться на 11 тільки при $a=5$. Тоді $110b+11c=495 \;\Leftrightarrow\; 10b+c=45 \;\Leftrightarrow\; b=4,\; c=5$.

5. По колу були записані 8 чисел. Потім між кожними сусідніми числами записали їх суму, а старі числа витерли. Чи могло виявитися так, що тепер по колу записані числа: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18?



Відповідь: ні, такі числа вийти не могли.

Розв'язання. Припустимо, що спочатку були записані числа a_1, a_2, a_3, …, a_8 (див. рисунок). Підрахуємо їх суму двома способами: $(a_1+a_2)+$ $+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+(a_7+a_8)=12+14+16+18=60$ і $(a_8+a_1)+(a_2+a_3)+$ $+(a_4+a_5)+(a_6+a_7)=11+13+15+17=56$. Дійшли до суперечності, отже, вказані в умові числа вийти не могли.