

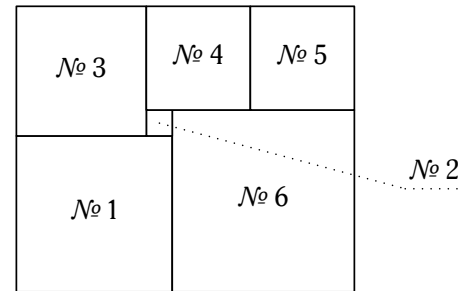


1. Замініть зірочки цифрами так, щоб рівність була правильною, а всі сім цифр були різними:  $**+**=175$ .  
**Відповідь:**  $92+83=175$ ;  $82+93=175$ ;  $93+82=175$ ;  $83+92=175$ .

2. Прямокутник розбитий на квадрати, всередині кожного квадрата написаний його номер. Відомо, що сторона квадрата № 1 — 18 см, а сторона квадрата № 2 — 3 см. Знайдіть сторони всіх інших квадратів. Відповідь поясніть.

**Відповідь:** № 3 — 15 см, № 4 і № 5 — по 12 см, № 6 — 21 см.

**Розв'язання.** Сторона квадрата № 3 дорівнює різниці сторін квадратів № 1 і № 2, тобто 15 см. Сторона квадрата № 4 дорівнює різниці сторін квадратів № 3 і № 2, тобто 12 см. Сторона квадрата № 5 також дорівнює 12 см. Сторона квадрата № 6 дорівнює сумі сторін квадратів № 1 і № 2, тобто 21 см.



3. Вік старого Хоттабича записується чотирицифровим числом. Про це число відомо наступне: а) якщо першу та останню цифри закреслити, то залишиться двоцифрове число, сума цифр якого 13 і воно є найбільшим із цією властивістю; б) перша цифра більша за останню в 5 разів. Скільки років старому Хоттабичу? Відповідь поясніть.

**Відповідь:** 5941 рік.

**Розв'язання.** Для того, щоб двоцифрове число було найбільшим, треба взяти цифру десятків як найбільшою. Якщо взяти цифру десятків 9, тоді цифра одиниць  $13-9=4$ . Остання цифра може бути тільки 1. В іншому випадку добуток п'ятірки і будь-якої іншої цифри уже не буде двоцифровим числом. Отже, вік старого Хоттабича — 5941 рік.

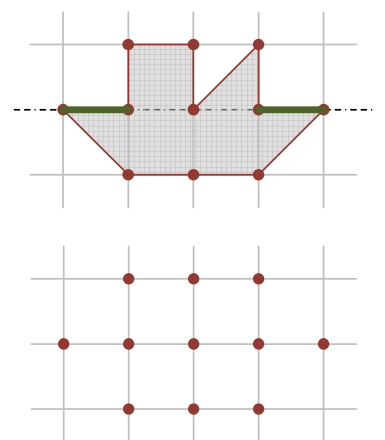
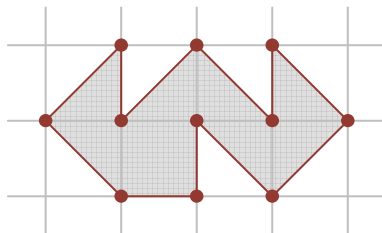
4. Татусь, Марійка та Софійка йдуть до школи. Поки тато робить 3 кроки, Марійка робить 5 кроків. Поки Марійка робить 3 кроки, Софійка робить 5 кроків. Марійка та Софійка порахували, що разом вони зробили 400 кроків. Скільки кроків зробив татусь? Відповідь поясніть.

**Відповідь:** 90.

**Розв'язання.** Поки Марійка робить  $3 \cdot 5 = 15$  кроків, татусь робить  $3 \cdot 3 = 9$  кроків, а Софійка робить  $5 \cdot 5 = 25$  кроків. Разом за цей час Марійка та Софійка зроблять  $15 + 25 = 40$  кроків. А поки вони зроблять 400 кроків, татусь зробить теж у десятеро більше кроків, тобто  $9 \cdot 10 = 90$  кроків.

5. Павучок-учень натягнув павутину між 11 точками так, щоб його павутинки ніде не перетиналися, і в кінці повернувся у вихідну точку. Павук-учитель його похвалив, і лише зауважив, що справжні майстри дотримуються таких самих умов, але натягають «правильну» павутину, у якій жодні два відрізки не лежать на одній прямій (на рисунку виділені відрізки лежать на одній прямій). Допоможіть павучку з'єднати всі 11 точок на малюнку «правильною» павутиною.

**Відповідь:** один з можливих способів наведено на рисунку.





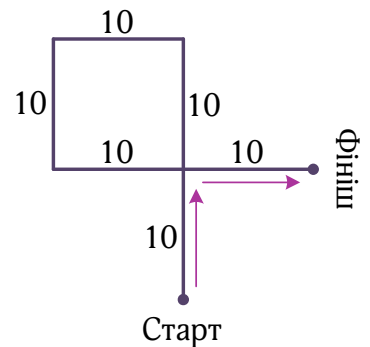
**XXVI Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»**  
**5 клас. Відповіді та вказівки**

1. Замініть букви різними цифрами так, щоб цифри стояли в порядку зростання:  $ЛД \cdot Д = ЕР$ .  
**Відповідь:**  $13 \cdot 6 = 78$ .

2. Як за допомогою двох пісочних годинників на 5 хв та 7 хв відміряти рівно 9 хв? Відповідь поясніть.  
**Розв'язання.** 1 спосіб. Перевертаємо обидва годинники. Коли пройде 5 хв, перевертаємо годинник на 5 хв. Коли пройде 7 хв, перевертаємо годинник на 5 хв, в якому пересипалось піску на 2 хв. 9 хв пройде, коли весь пісок у годиннику на 5 хв досиплеться. 2 спосіб. Перевертаємо обидва годинники. Коли пройде 5 хв, починаємо відлік часу. Коли пройде 2 хв (досиплеться пісок годинника на 7 хв), перевертаємо годинник на 7 хв. 9 хв пройде, коли весь пісок у годиннику на 7 хв досиплеться. 3 спосіб. Перевертаємо обидва годинники. Через 5 хв перевертаємо годинник на 5 хв. Через 7 хв перевертаємо годинник на 7 хв (у годиннику на 5 хв піску ще на 3 хв). Через 10 хв пересиплеться годинник на 5 хв (у годиннику на 7 хв піску ще на 4 хв) починаємо відлік. Ще через 4 хв перевертаємо годинник на 5 хв. Ще через 5 хв буде відміряно 9 хв.

3. Пішов Шрек шукати викрадену Драконом Фіону. Назустріч йому Віслюк.  
— Знаю, — каже, — я дорогу до Дракона, траплялося, ходив туди. Йшов я чотири дні і чотири ночі. За першу добу я пройшов третину шляху — прямою дорогою на північ. Потім повернув на захід, добу продирався лісом і пройшов вдвічі менше. Третю добу я знову йшов лісом, вже на південь, і вийшов на пряму дорогу, що веде на схід. Прокрокував я по ній за добу 20 км і потрапив до Дракона. Ти ходок такий же жвавий, як і я. Іди, Шреку, дивись, на п'ятий день будеш в гостях у Дракона.

*Схема руху Віслюка*



— Ні, — відповів Шрек, — якщо все так, як ти кажеш, то вже завтра я побачу мою Фіону.

Яку відстань проходив Віслюк та яку відстань має пройти Шрек за умови, що Віслюк та Шрек прямою дорогою та лісом однаково йдуть з постійною швидкістю (дорогою та лісом з різною швидкістю)? Відповідь поясніть.

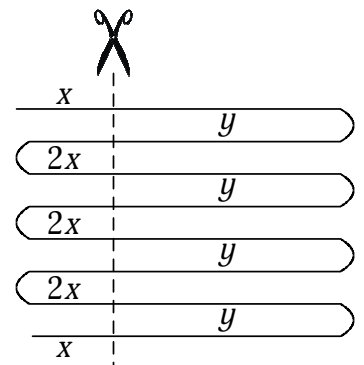
**Відповідь:** 60 км; 20 км.

**Розв'язання.**  $\frac{1}{3}$  дороги +  $\frac{1}{6}$  дороги +  $\frac{1}{6}$  дороги + 20 км = 1 дорога, тобто 20 км =  $\frac{1}{3}$  дороги. Отже, весь шлях Віслюка 60 км. Шлях Шрека — 20 км.

4. Мотузку склали навпіл, потім ще раз навпіл, потім знову навпіл, а потім усі шари мотузки розрізали в одному місці. Якою могла бути довжина мотузки, якщо відомо, що деякі два з отриманих шматків мали довжини 9 м і 4 м? Знайдіть усі можливі варіанти. Відповідь поясніть.

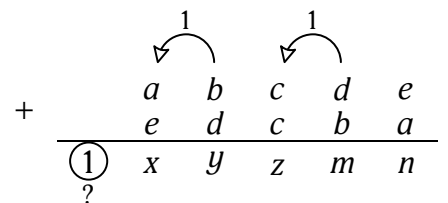
**Відповідь:** 52 см; 68 см; 88 см.

**Розв'язання.** Варіант 1:  $x = 4$ ;  $y = 9$ . Тоді довжина  $8 \cdot 4 + 4 \cdot 9 = 68$  (см). Варіант 2:  $2x = 4$ ,  $x = 2$ ;  $y = 9$ . Тоді довжина  $8 \cdot 2 + 4 \cdot 9 = 52$  (см). Варіант 3:  $x = 9$ ;  $y = 4$ . Тоді довжина  $8 \cdot 9 + 4 \cdot 4 = 88$  (см). Варіант 4:  $2x = 9$ ,  $x = 4,5$ ;  $y = 9$ . Тоді довжина  $8 \cdot 4,5 + 4 \cdot 4 = 52$  (см).



5. Олюся загадала п'ятицифрове число, Іруся додала до нього п'ятицифрове число, записане тими самими цифрами, але в зворотному порядку, а Маруся обчислила добуток цифр отриманої суми та отримала в результаті непарне число. Доведіть, що Маруся помилилась.

**Доведення.** Якщо Маруся отримала непарну відповідь  $xyzmn$ , тобто  $x, y, z, m$  і  $n$  — непарні.



$$+ \begin{array}{r} c \\ c \\ z \end{array}, \text{ отже } d + b > 9, \text{ тому } + \begin{array}{r} a \\ e \\ x \end{array}; + \begin{array}{r} e \\ a \\ n \end{array}.$$
 Таким чином,  $x$  та  $n$  відрізняються на 1, тобто одне з них парне. Тому Маруся помилилась.

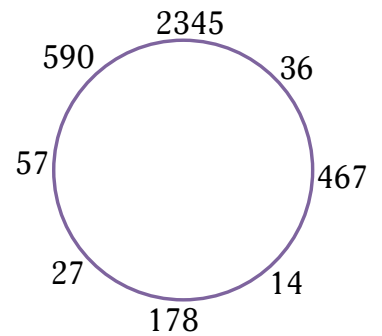


XXVI Відкрита математична олімпіада ліцею «Лідер»  
6 клас. Відповіді та вказівки

1. Розставте по колу числа 14, 27, 36, 57, 178, 467, 590 і 2345 так, щоб будь-які два сусідніх числа мали спільну цифру.

**Відповідь:** див. рисунок.

**Розв'язання.** Помічаємо, що поряд з 590 можуть стояти лише 57 та 2345, а поряд з 36 — лише 2345 та 467.



2. Поїзд Київ – Нью-Йорк має суцільну нумерацію місць у вагонах (нумерація починається з 1). В усіх вагонах одна й та сама кількість місць. Відомо, що місця 2014 і 2045 знаходяться в одному й тому самому вагоні, а місця 2508 і 2542 — у різних, причому не сусідніх, вагонах. Скільки місць в одному вагоні? Відповідь поясніть.

**Відповідь:** 33 місця.

**Розв'язання.** З того, що 2014 та 2045 місця знаходяться в одному вагоні, випливає, що в вагоні не менше 32 місць ( $2045 - 2014 + 1 = 32$ ). З того, що місця 2508 і 2542 у різних, не сусідніх вагонах, випливає, що місць у вагоні не більше ніж 33 ( $2542 - 2508 - 1 = 33$ ). Якби у вагонах було по 32 місця, то 63-й вагон мав би місця з 1985-го по 2016-те і місця 2014 та 2045 були б у різних вагонах. Якщо у вагонах буде по 33 місця, то в поїзді будуть вагони 2014–2046 та 2509–2541.

3. Знайдіть усі трійки простих чисел  $x$ ,  $y$  і  $z$  таких, що  $19x - yz = 171$ . Відповідь поясніть.

**Відповідь:**  $x = 11$ ,  $y = 19$ ,  $z = 2$  або  $x = 11$ ,  $y = 2$ ,  $z = 19$ .

**Розв'язання.** Помічаємо, що 171 ділиться націло на 19. Тоді  $yz = 19(x - 9)$ . Оскільки  $y$  і  $z$  — прості, то одне з них дорівнює 19, а інше —  $(x - 9)$ . Нехай, наприклад,  $z = 19$ ,  $y = x - 9$ . Тоді або  $y$ , або  $x$  — парне число, а отже,  $y = 2$ ,  $x = 11$ . Випадок  $y = 19$  розглядається аналогічно.

4. У трамваї їхали 60 осіб, серед яких були контролери, кондуктори, люди, що видавали себе за контролерів, люди, що видавали себе за кондукторів, та, можливо, звичайні пасажирів. Загальна кількість несправжніх контролерів та несправжніх кондукторів у 4 рази менша від загальної кількості справжніх кондукторів та контролерів. Кількість контролерів (разом із несправжніми контролерами) у 7 разів більша за кількість кондукторів (разом із несправжніми кондукторами). Скільки у трамваї звичайних пасажирів? Відповідь поясніть.

**Відповідь:** 20.

**Розв'язання.** З того, що загальна кількість несправжніх контролерів та несправжніх кондукторів у 4 рази менша від кількості справжніх, випливає, що загальна кількість всіх людей, що не є звичайними пасажирами, кратна 5. З того, що загальна кількість контролерів (разом з несправжніми) у 7 разів більша за кількості кондукторів (разом з несправжніми), випливає, що загальна кількість всіх людей, що не є звичайними пасажирами, кратна 8. Кількість людей, що не є звичайними пасажирами, кратна 5, кратна 8 і не перевищує 60, а отже дорівнює 40.

5. У війську герцога Ікторна 1000 гоблінів. Будь-які два гобліни або дружать, або ворогують, або незнайомі. Гобліни — істоти мовчазні, розмовляють лише з друзями. До того ж вони всі мають поганий настрій, оскільки у кожного гобліна кожен двоє його друзів ворогують, а кожен двоє вороги дружать. Доведіть, що для того, щоб усе військо дізналося про майбутній наступ, герцог має повідомити про це не менш ніж 200 гоблінам.

**Доведення.** Доведемо, що жоден з гоблінів не може мати більше двох друзів. Припустимо, що у гобліна  $A$  є троє друзів:  $B$ ,  $C$  і  $D$ .  $B$  та  $D$  є ворогами, оскільки вони є друзями гобліна  $A$ . Аналогічно  $B$  та  $C$  є ворогами. Але тоді  $C$  та  $D$  є, з одного боку, ворогами (вони друзі гобліна  $A$ ), а з іншого — друзями (вони вороги гобліна  $B$ ). Отримана суперечність доводить, що у гобліна не може бути більше двох друзів. Тоді гоблін разом зі своїми друзями, друзями своїх друзів і т. д. утворюють ланцюжок (можливо циклічний), по якому може розповсюджуватися інформація. Нехай  $A, B, C, D, E$  — частина цього ланцюжка.  $B$  дружить з  $A$  та  $C$ , а отже  $A$  та  $C$  — вороги.  $D$  дружить з  $C$  та  $E$ , а отже  $C$  та  $E$  — вороги.  $A$  та  $E$  ворогують із  $C$ , а отже  $A$  та  $E$  — друзі. Таким чином, довжина ланцюжка друзів не може складатися більше ніж з 5 гоблінів. Отже, один гоблін може передати інформацію, в тому числі і через друзів, не більше ніж 4 іншим. Якщо герцог повідомить інформацію менше ніж 200 гоблінам, то про наступ дізнаються менше ніж  $200 \cdot 5$  гоблінів, тобто не все військо.



1. Наведіть приклад такого трицифрового числа, яке не ділиться на 102, але якщо його запис повторити 15 разів, то отримане багатоцифрове число буде ділитися на 102. Поясніть, чому саме ви вважаєте, що воно ділиться на 102.

**Відповідь:** наприклад, число 170.

**Розв'язання.** Маємо:  $102 = 17 \cdot 2 \cdot 3$ . Число 170 ділиться на 17 і на 2, але не ділиться на 3. Якщо його запис повторити 15 разів, то сума цифр отриманого числа буде ділитися на 3, отже, воно буде ділитися на 17, 2 і 3, тобто на 102.

2.  $СОН - ХТО = 857$ . На скільки  $СТО - ТО$  більше, ніж  $СОН - СТО$ ? Тут однаковим буквам відповідають однакові цифри, а різним — різні. Відповідь поясніть.

**Відповідь:** на 843.

**Розв'язання.** Зрозуміло, що  $C = 9$ ,  $X = 1$ , тобто  $СТО - ТО = 900$ . Крім того,  $ОН - ТО = 57$ , тобто  $СОН - СТО = 57$ . Таким чином,  $СТО - ТО$  більше, ніж  $СОН - СТО$  на  $900 - 57 = 843$ .

3. Вася знайшов добуток усіх натуральних чисел від 1 до 2018, відняв 1 від добутку і записав результат на довгому аркуші паперу. Яку найменшу кількість цифр потрібно у цьому числі замінити нулями, щоб отримане число ділилося на 13? Відповідь поясніть.

**Відповідь:** одну.

**Розв'язання.** Позначимо  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2018$  через  $n$ . Число  $n$  ділиться на 13, отже  $n - 1$  не ділиться на 13, тобто принаймні одну цифру доведеться замінити. З іншого боку, число  $n$  ділиться на 100, тобто закінчується двома нулями, отже,  $n - 1$  закінчується двома дев'ятками. Замінімо передостанню дев'ятку нулем. Це те саме, що відняти від числа 90. Таким чином, ми отримаємо число  $n - 91$ , яке ділиться на 13, оскільки  $n$  ділиться на 13 і 91 ділиться на 13.

4. Алгебраїсти придумали нову операцію  $\Theta$ , яка задовольняє умовам  $a \Theta a = 0$  і  $a \Theta (b \Theta c) = (a \Theta b) + c$ . Обчисліть  $2018 \Theta 2017$ . Знак «+» означає додавання у звичайному сенсі, дужки показують порядок дій. Відповідь поясніть.

**Відповідь:** 1.

**Розв'язання.** Маємо:

$$\begin{aligned} (2018 \Theta 2017) + 2017 &= 2018 \Theta (2017 \Theta 2017) = 2018 \Theta 0 = \\ &= 2018 \Theta (2018 \Theta 2018) = (2018 \Theta 2018) + 2018 = 0 + 2018 = 2018, \end{aligned}$$

звідки  $2018 \Theta 2017 = 2018 - 2017 = 1$ .

Аналогічно можна довести, що для будь-яких  $a$  і  $b$  виконується рівність  $a \Theta b = a - b$ .

5. У трикутнику  $ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ . На промені  $CB$  взято точку  $M$  так, що  $CB = BM$ . У точці  $B$  до  $AB$  проведено перпендикуляр  $BK$  так, що точки  $K$  і  $M$  лежать у різних півплощинах відносно  $AB$ , причому  $BK$  дорівнює  $AC$ . Знайдіть  $\angle MAK$ . Відповідь поясніть.

**Відповідь:**  $60^\circ$ .

**Розв'язання.** Розглянемо трикутники  $AMC$  і  $ABK$ . Вони прямокутні,  $MC = 2BC = AB$ ,  $BK = AC$  за умовою. Тобто ці трикутники рівні. Тоді  $\angle AMC = \angle BAK$ . Але  $\angle MAC + \angle AMC = 90^\circ$ . Тобто  $\angle MAC + \angle BAK = 90^\circ$ . Отже,  $\angle MAK = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

